第16回 6月17日の授業内容

- 【6月16日授業スライドの訂正について】
  - §5.3.3 大数の法則と中心極限定理:再論
- §6. 母数の推定
  - §6.1 推定量:種類と性質
  - §6.2 点推定
    - §6.2.1 母平均の推定
    - §6.2.2 母分散の推定
    - §6.2.3 偏差2乗和の分布

6/17/09 1

§6. 母数の推定

§6.1 推定量estimator:種類と性質

- 主観的推論と統計的推論
  - 統計的推論=標本データに基づく推論
- 統計量に基づく推定=推定量
  - 標本データに基づく推論⇔標本データの関数

  ⇓

  - 統計量を推定量として採用

6/17/09 7

§6.1 推定量:種類と性質(2)

- 推定法:
  - 点推定 point estimation
    母数の値そのものを当てる
  - 区間推定 interval estimation
    母数の値の範囲を当てる←信念の程度
- 推定量の「良さ」の基準
  - 不偏性 unbiasness — 推定量の分布の平均が母数に一致すること
  - 一致性 consistency — n→∞のとき、推定量の分布が母数の一点分布になる(母数に確率収束する)こと
  - 効率性 efficiency — 不偏性を満たす推定量のうち、推定量の分布の分散が小さいこと

6/17/09 8

§6.2 点推定

§6.2.1 母平均の推定

同一母集団からのランダム標本、$X_1,\ldots,X_n$から母集団の平均μを点推定する。

- 推定量(1):算術平均

$$\hat{\mu} = \overline{X}_n$$

$$\mathrm{E}(\hat{\mu}) = \mu, \quad \mathrm{Var}(\hat{\mu}) = \sigma^2 / n$$

- 不偏性、一致性を満たす。
- 後述のように効率性も満たす。

6/17/09 9

§6.2.1 母平均の推定(2)

- 推定量(2):加重平均

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} w_i X_i, \qquad ただし \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

$$\mathrm{E}(\hat{\mu}) = \sum_{i=1}^{n} w_i \mathrm{E}(X_i) = \mu \sum_{i=1}^{n} w_i = \mu$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\mu}) = E\left((\hat{\mu}-\mu)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 E\left((X_i-\mu)^2\right) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} w_i^2$$

6/17/09 10

§6.2.1 母平均の推定(3)

- 推定量(2):加重平均(続)
  - 推定量の分散が最小になるウエイトw_i

  ⇓

  $w_1=w_2=\ldots=w_n=1/n$ のとき分散が最小

  - 算術平均は効率性を満たす推定量
    最良線形不偏推定量 Best Linear Unbiased Estimator

6/17/09 11

§6.2.2 母分散の推定

- ①母平均μが既知の場合
  - 推定量

$$\tilde{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{n}$$

  - 不偏性、一致性は満たす

$$\mathrm{E}(\tilde{\sigma}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i-\mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \sigma^2$$

$$\mathrm{Var}(\tilde{\sigma}^2) = \frac{1}{n}(\mu_4-\sigma^4)$$

§6.2.2 母分散の推定(2)

- ②母平均μが未知の場合
  - 推定量(1)

$$\tilde{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\overline{X}_n)^2}{n}$$

母平均の推定量として標本平均 (標本の算術平均) を採用。

§6.2.2 母分散の推定(3)

- 推定量(1) (続)
  - 不偏性は満たさないが、一致性は満たす。

$$\mathrm{E}(\tilde{\sigma}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i-\overline{X}_n)^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$$\mathrm{Var}(\tilde{\sigma}^2) = \frac{\mu_4-\sigma^4}{n} - \frac{2(\mu_4-2\sigma^4)}{n^2} + \frac{\mu_4-3\sigma^4}{n^3}$$

§6.2.2 母分散の推定(4)

- ②母平均μが未知の場合 (続)
  - 推定量(2)

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\overline{X}_n)^2}{n-1}$$

  - 不偏性、一致性ともに満たす。

$$\mathrm{E}(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i-\overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma^2-\sigma^2\right) = \sigma^2$$

§6.2.3 偏差2乗和の分布

- 母分散の推定量の分布は?
  - 母平均μが既知のときの推定量 $\tilde{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{n}$ の分布を考えることにしよう。

$X_i \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$であるとき、$\frac{X_i-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1)$。

ゆえに $\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$

χ^2分布の再生性より、$\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$

よって、$\frac{n\tilde{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$

§6.2.3 偏差2乗和の分布(2)

6/24訂正

- 母平均μが未知のときの推定量 $\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\overline{X})^2}{n-1}$ の分布を考えることにしよう。

実は、$X_i \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$であるとき、$Y_i \sim \mathrm{N}(0,\sigma^2)$を用いて

$\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{Y_i^2}{\sigma^2}$ と表せることが知られている。

よって、$\frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n-1}Y_i^2 \sim \chi^2(n-1)$

自由度が1小さい、すなわちn-1になっていることに注意