2009年度 学部 統計 第16回講義補足資料

2009 年 6 月 17 日

母分散の推定量 $\breve{\sigma}^2$, $\hat{\sigma}^2$ の期待値の導出

スライド 14, 15 ページ（配布資料 9, 10 コマ）にある母分散の推定量 $\breve{\sigma}^2$, $\hat{\sigma}^2$ の（数学的）期待値は次のようにして求めることができる。

全般的な注意

X_i $(i = 1, \ldots, n)$ は（確率分布の）平均が μ、分散が σ^2 である、互いに独立な確率変数であると仮定していることに注意。すなわち

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu, \ \ \mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{E}(X_i - \mu)^2 = \sigma^2, \ \ \text{for } i = 1, \ldots, n$$

$$\mathrm{E}(X_i\, X_j) = \mathrm{E}(X_i) \times \mathrm{E}(X_j) = \mu^2 \ \ \text{for } i \neq j$$

である。

1　板書の方法

板書で示したように、まず $(X_i - \bar{X}_n)^2$ の期待値を求めることから始めよう。

$$\begin{aligned}
(X_i - \bar{X}_n)^2 &= \left(\frac{n-1}{n} X_i - \frac{1}{n} \sum_{j \neq i} X_j \right)^2 \\
&= \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 X_i^2 - \frac{2(n-1)}{n^2} X_i \sum_{j \neq i} X_j + \frac{1}{n^2} \sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i} X_j X_l \qquad (1)
\end{aligned}$$

(1) 式の第 3 項目は

$$\frac{1}{n^2} \sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i} X_j X_l = \frac{1}{n} \left(\sum_{j \neq i} X_i^2 + \sum_{j,l \neq i} \sum_{j \neq l} X_j X_l \right)$$

に分解できるから、(1) 式の両辺の期待値をとると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_i-\bar{X_n})^2 &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\mathrm{E}(X_i^2)-\frac{2(n-1)}{n^2}\mathrm{E}(X_i)\sum_{j\neq i}\mathrm{E}(X_j) \\
&\quad +\frac{1}{n^2}\sum_{j\neq i}\mathrm{E}(X_j^2)+\frac{1}{n^2}\sum_{j,l\neq i}\sum_{j\neq l}\mathrm{E}(X_j)\mathrm{E}(X_l) \\
&= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\mathrm{E}(X_i^2)+\frac{n-1}{n^2}\mathrm{E}(X_i^2)-\frac{2(n-1)^2}{n^2}\mu^2+\frac{(n-1)^2-(n-1)}{n^2}\mu^2 \\
&= \frac{(n-1)n}{n^2}\mathrm{E}(X_i^2)-\frac{(n-1)(2(n-1)-(n-1)+1)}{n^2}\mu^2 \\
&= \frac{n-1}{n}(\mathrm{E}(X_i^2)-\mu^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2 \qquad (2)
\end{aligned}$$

が得られる。

よって、

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\breve{\sigma^2}) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i-\bar{X_n})^2=\frac{1}{n}\times n\times\frac{n-1}{n}\sigma^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2, \qquad (3) \\
\mathrm{E}(\hat{\sigma^2}) &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i-\bar{X_n})^2=\frac{1}{n-1}\times n\times\frac{n-1}{n}\sigma^2=\sigma^2. \qquad (4)
\end{aligned}$$

がそれぞれ得られる。

2 例: $n=3$ のとき

上の説明が分かりにくい人のために、具体例で考えてみよう。$n=3$ のとき、

$$\sum_{i=1}^{3}(X_i-\bar{X_3})^2=(X_1-\bar{X_3})^2+(X_2-\bar{X_3})^2+(X_3-\bar{X_3})^2$$

である。$\bar{X_3}=(1/3)(X_1+X_2+X_3)$ であるから、

$$\begin{aligned}
(X_1-\bar{X_3})^2 &= \left(\frac{2}{3}X_1-\frac{1}{3}(X_2+X_3)\right)^2 \\
&= \frac{4}{9}X_1^2-\frac{4}{9}X_1(X_2+X_3)+\frac{1}{9}(X_2^2+2X_2X_3+X_3^2)
\end{aligned}$$

両辺の期待値をとると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_1-\bar{X_3})^2 &= \frac{4}{9}\mathrm{E}(X_1^2)-\frac{4}{9}\mathrm{E}(X_1)\mathrm{E}(X_2+X_3)+\frac{1}{9}\mathrm{E}(X_2^2+2X_2X_3+X_3^2) \\
&= \frac{4}{9}\mathrm{E}(X_1^2)+\frac{1}{9}\left(\mathrm{E}(X_2^2)+\mathrm{E}(X_3^2)\right)-\frac{4}{9}2\mu^2+\frac{1}{9}2\mu^2 \\
&= \frac{6}{9}\mathrm{E}(X_1^2)-\frac{6}{9}\mu^2 \\
&= \frac{2}{3}\mathrm{Var}(X_1)=\frac{(3-1)}{3}\sigma^2
\end{aligned}$$

が得られる。上の計算で、$\mathrm{E}(X_1^2) = \mathrm{E}(X_2^2) = \mathrm{E}(X_3^2)$ を用いていることに注意。

よって、

$$\mathrm{E}(\hat{\sigma^2}) = \frac{1}{(3-1)}\sum_{i=1}^{3}\mathrm{E}\left((X_i - \bar{X}_3)^2\right) = \frac{1}{(3-1)}\sum_{i=1}^{3}\frac{(3-1)}{3}\sigma^2 = \sigma^2$$

となる。

3 教科書の方法

板書で示した導出は、少し面倒である。もっとスマートな導出法は、教科書 168〜169 ページに記載されているので、それを参考にして欲しい。簡単に示すと、

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left((X_i - \bar{X_n})\right)^2 &= \mathrm{E}\left(((X_i - \mu) - (\bar{X_n} - \mu))^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left((X_i - \mu)^2\right) - 2\mathrm{E}\left((X_i - \mu)(\bar{X_n} - \mu)\right) + \mathrm{E}\left((\bar{X_n} - \mu)^2\right) \\
&= \mathrm{Var}(X_i) - \frac{2}{n}\mathrm{Var}(X_i) - 2\mathrm{E}(X_i - \mu)\sum_{j\neq i}\frac{1}{n}\mathrm{E}(X_j - \mu) + \mathrm{Var}(\bar{X_n}) \\
&= \sigma^2 - \frac{2}{n}\sigma^2 - 2\times 0\times 0 + \frac{1}{n}\sigma^2 \\
&= \frac{n-1}{n}\sigma^2
\end{aligned}$$

の結果を用いて導出する。