第18回　6月24日の授業内容

- §6．母数の推定
  - §6.3　区間推定
    - §6.3.1　母平均の推定（母分散が既知）

§6.3　区間推定

- §6.3.1　母平均の推定（母分散が既知）
  - 区間推定 interval estimation
    「だいたい、この位」という形の推定法を数学的に定式化したもの。
    「だいたい」⇒（推定の）信頼度を表す。
    「この位」　⇒推定した値の範囲。

§6.3.1　母平均の推定（母分散が既知）(2)

- 簡単なケース：　X_i〜N (μ，σ²)
  - μの推定量として標本平均 $\overline{X}_n$ を採用

$-\overline{X}_n \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2/n\right)$　であるから、以下の関係が成立。

$$\mathrm{P}\left(\mu - 2\sqrt{\sigma^2/n} < \overline{X}_n \leq \mu + 2\sqrt{\sigma^2/n}\right) = 0.955$$

$$\mathrm{P}\left(\overline{X}_n - 2\sqrt{\sigma^2/n} < \mu \leq \overline{X}_n + 2\sqrt{\sigma^2/n}\right) = 0.955$$

信頼度

§6.3.1　母平均の推定（母分散が既知）(3)

- 前述の方法は、正規分布の性質を用いている。
- いま、X〜N(d, w²)とすると、
  - P(d-w<X≦d+w)=0.6826
  - P(d-2w<X≦d+2w)=0.9550
  - P(d-3w<X≦d+3w)=0.9973
- 同様に、Z〜N(0, 1)とすると、
  - P(-1<Z≦1)=0.6826
  - P(-2<Z≦2)=0.9550
  - P(-3<Z≦3)=0.9973

⇒ 標準正規分布表

§6.3.1　母平均の推定（母分散が既知）(4)

- 標準正規分布表（教科書p.296：付表3）の読み方
  - Z〜N(0, 1)であるとき、Φ(x)≡P(Z≦x)　を表にしたもの。

小数第一位 ↓　　小数第二位

x	.00	.01	…	.04	…	.06
.0	.5000	.5040		.5160		.5239
.1	.5398	.5438		.5557		.5636
.2	.5793	.5832		.5948		.6026
…						
1.0	.8413	.8438		.8508		.8554
…						
1.6	.9452	.9463		**.9495**		.9515
…						
1.9	.9713	.9719		.9738		**.9750**
2.0	.9773	.9778		.9793		.9803
2.1	.9821	.9826		.9838		.9846

§6.3.1　母平均の推定（母分散が既知）(5)

- 標準正規分布表より
  - Φ(1.64)=0.9495
  - Φ(1.96)=0.9750
  - Φ(2.00)=0.9773
- P(-1.96<Z≦1.96)=Φ(1.96)ーΦ(-1.96)
  =Φ(1.96)ー(1ーΦ(1.96))
  =2Φ(1.96)ー1=0.95

信頼係数

§6.3.1 母平均の推定 (母分散が既知) (6)

- 一般にαを決めて、対応するbを探す。

  $P(-b<Z\leqq b)=2\Phi(b)-1=\alpha$

  信頼係数

- X〜N(d, w²)のときには、(X−d)/w〜N(0, 1)であるから、Z= (X−d)/wとして

  $P(-b<(X-d)/w\leqq b)=P(X-wb<d\leqq X+wb)$

  $=2\Phi(b)-1=\alpha$

§6.3.1 母平均の推定 (母分散が既知) (7)

- 以上をまとめると、
  - α＝0.90のとき

    $$\mathrm{P}\left(\overline{X}_n-1.64\sqrt{\sigma^2/n}<\mu\leq\overline{X}_n+1.64\sqrt{\sigma^2/n}\right)=0.90$$

  - α＝0.95のとき

    $$\mathrm{P}\left(\overline{X}_n-1.96\sqrt{\sigma^2/n}<\mu\leq\overline{X}_n+1.96\sqrt{\sigma^2/n}\right)=0.95$$

§6.3.1 母平均の推定 (母分散が既知) (8)

- 以上の説明は、X_i〜N (μ, σ²) を仮定。
- しかし、一般のケースでも標本の大きさnが十分に大きければ、中心極限定理より標本平均の分布は正規分布に収束するので、同様に推定することができる。

§6.3.1 母平均の推定 (母分散が既知) (9)

- 推定例
  - 発酵時間の母平均
    - 標本の大きさ (n)： 10
    - データ (時間)：
      46, 39, 40, 41, 33, 35, 45, 43, 40, 38
    - 母分散σ²は16 (既知)
  - 母平均μの不偏推定量として標本平均を用いると、

    $$\mathrm{E}(\hat{\mu})=\mathrm{E}(\overline{X}_n)=\mu,\quad \mathrm{Var}(\hat{\mu})=\mathrm{Var}(\overline{X}_n)=\frac{\sigma^2}{n}$$

    という性質があるから、

    $$\sqrt{\mathrm{Var}(\overline{X}_{10})}=\sqrt{\frac{\sigma^2}{10}}=\sqrt{16/10}=1.26$$

§6.3.1 母平均の推定 (母分散が既知) (10)

前ページより続く

- 標本平均 $\overline{X}_{10}$ は40.0
- 信頼係数αを0.95とする
  - p=0.025であるから、標準正規分布表より
    $\Phi^{-1}(0.025)=1.96$
- よって、

$$\mathrm{P}\left(\overline{X}_{10}-1.96\sqrt{\sigma^2/10}<\mu\leq\overline{X}_{10}+1.96\sqrt{\sigma^2/10}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(40-1.96\sqrt{16/10}<\mu\leq 40+1.96\sqrt{16/10}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(37.52<\mu\leq 42.48\right)=0.95$$

区間推定