第19回　6月30日の授業内容

- §6．母数の推定
  - 6/17講義スライドの訂正
  - §6.3　区間推定
    - §6.3.2　母平均の推定（母分散が未知）

§6.3.2　母平均の推定（母分散が未知）(1)

- 再び X_i〜N（μ，σ²）を仮定しよう。
- 区間推定は $\mathrm{P}\left(\overline{X}_n - b\sqrt{\sigma^2/n} < \mu \le \overline{X}_n + b\sqrt{\sigma^2/n}\right) = \alpha$

のように行うため、σ²が未知のときには、区間の計算ができない。

σ²を推定量で置換えることはできるのか？

§6.3.2　母平均の推定（母分散が未知）(2)

- 標本平均 $\overline{X}_n$ を標準化するとき、σ²を推定量

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$$

で置換えると、分布が異なってしまう。

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim \mathrm{N}(0,1) \qquad \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}} \sim t(n-1)$$

異なる分布

§6.3.2　母平均の推定（母分散が未知）(3)

- t分布：Student-t distribution
  - Z〜N(0,1)、W〜χ²(k) で、ZとWが独立であるとき、

$$Q = \frac{Z}{\sqrt{W/k}} \sim t(k)$$　自由度 k の t 分布

  - 確率密度関数

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\sqrt{\pi k}\,\Gamma(\frac{k}{2})}\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-(k+1)/2}, \quad k>0$$

§6.3.2　母平均の推定（母分散が未知）(4)

- t分布の性質
  - 標準正規分布同様、0を中心に左右対称なベル型の密度関数をもつ。
  - 標準正規分布よりも分布の裾（すそ）が厚い。
  - Q〜t(k)であるとき、
    - E(Q)=0　k>1のとき
    - <u>k≦1の時は、平均は存在しない。</u>
    - Var(Q)=k/(k-2)　k>2のとき
    - <u>k≦2の時は分散は存在しない。</u>

§6.3.1　母平均の推定（母分散が未知）(5)

- t分布表：教科書p297 付表4
  - 分布関数F(b)=P（Q≦b）=1-pより、G(b)≡1-F(b)=P(Q>b)=pを定義する。Gの逆関数b=G⁻¹(p)を数表にしたもの。

	p				
自由度k	0.250	…	0.050	0.025	…
1	1.000		6.314	12.710	
2	0.817		2.920	4.303	
3	0.766		2.354	3.182	
…					
10	0.700		1.813	2.228	
…					
100	0.677		1.660	1.984	
∞	**0.674**		**1.645**	**1.960**	

標準正規分布

§6.3.2 母平均の推定 (母分散が未知) (6)

- $\dfrac{\overline{X}_n-\mu}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}}$が自由度k=n-1のt分布にしたがうことの証明

$\dfrac{\overline{X}_n-\mu}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}}$ の分子、分母をσで割ると、

$$\frac{(\overline{X}_n-\mu)/\sigma}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}/\sigma}=\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\div\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}}=\frac{A}{\sqrt{B}}$$

となる。分子のAは、A〜N(0,1)。
一方、Bは

$$B=\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}=\frac{1}{(n-1)\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2$$

次ページへ

§6.3.2 母平均の推定 (母分散が未知) (7)

前ページより
実は

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2$$

は、自由度n-1のカイ2乗分布にしたがう確率変数であるから、
Bは自由度n-1のカイ2乗分布にしたがう確率変数を自由度で割ったものに等しい。

以上のことと、t分布の定義より

$\dfrac{\overline{X}_n-\mu}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}}$ は自由度n-1のt分布にしたがうことがわかる。 ■

§6.3.1 母平均の推定 (母分散が未知) (8)

- **母平均の区間推定**
  - 分散の推定量で標準化した標本平均Qは、Q〜t (n-1) 。
  - 一般に信頼係数αを決めて、pを求め、Gの逆関数b=G^{-1}(p)から対応するbを探す。

P(-b<Q≦b)=P(-G^{-1}(p)<Q≦G^{-1}(p))
=F(b)-F(-b)=F(b)-(1-F(b))
=2F(b)-1=2(1-G(b))-1
=1-2p= **α**

§6.3.1 母平均の推定 (母分散が未知) (9)

- **推定例**
  - 発酵時間の母平均
    - 標本の大きさ (n)： 10
    - データ (時間)：
      46, 39, 40, 41, 33, 35, 45, 43, 40, 38
    - 標本データはN (μ，σ^2) にしたがう確率変数であるが、μ，σ^{2}共に未知

											合計
X	46	39	40	41	33	35	45	43	40	38	400
X^2	2116	1521	1600	1681	1089	1225	2025	1849	1600	1444	16150

§6.3.1 母平均の推定 (母分散が未知) (10)

- **推定例 (続)**
  - これより平均μ、分散σ^{2}の不偏推定量は、

$$\hat{\mu}=\overline{X}_{10}=400/10=40$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{10-1}\sum_{i=1}^{10}\left(X_i-\overline{X}_{10}\right)^2=\frac{1}{9}\left(\sum_{i=1}^{10}X_i^2-10\overline{X}_{10}^2\right)$$

$$=\frac{16150-16000}{9}=16.67$$

よって

$$\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{10}}=\sqrt{\frac{16.67}{10}}=\sqrt{1.667}=1.29$$

次ページへ

§6.3.1 母平均の推定 (母分散が未知) (11)

- 信頼係数αを0.95とすると、
  - 前ページより p=0.025、自由度k=10-1=9であるから、t分布表より、G^{-1}(0.025;k=9)=2.262
- よって、

$$\mathrm{P}(-b<Q\le b)=\mathrm{P}\left(\overline{X}_n-b\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}<\mu\le\overline{X}_n+b\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}\right)$$
$$=\mathrm{P}(40-2.262\times1.29<\mu\le40+2.262\times1.29)$$
$$=\mathrm{P}(\underline{37.08<\mu\le42.92})=0.95$$

区間推定