第20回 7月 1日の授業内容

- §6. 母数の推定
  - §6.3 区間推定
    - §6.3.3 母平均の推定(分布、母平均、母分散共に未知)
  - §6.4 最尤法
    - §6.4.1 尤度関数
    - §6.4.2 最尤推定量

§6.3.3 母平均の推定

(分布、母平均、母分散共に未知)

- §6.3.2 では $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ で、かつσ^2が未知と仮定。
- しかし、実際には、X_i の分布が正規分布であることは稀。
- 中心極限定理(CLT)より、n→∞のとき、標準化した $\bar{X}_n$ 、すなわち $(\bar{X}_n - \mu)/\sqrt{\sigma^2/n}$ が標準正規分布に従うことを用いて区間推定を行う。
- だが、問題なのはσ^2が未知であること。
- 推定量$\hat{\sigma}^2$が一致推定量であれば、CLTが成立するような標本数n→∞のとき、 $\hat{\sigma}^2 \to \sigma^2$ となる。
- $\hat{\sigma}^2$をσ^2とみなして、母分散が既知のときと同様に推定する。

§6.3.3 母平均の推定

(分布、母平均、母分散共に未知)(2)

【結論】

- 分布が未知の時の母平均の区間推定は、中心極限定理に基づく、大標本近似による推定。
- 近似の誤差
  - 真の分布を標準正規分布で近似したときの誤差
  - σ^2を推定量$\hat{\sigma}^2$で近似したときの誤差

§6.3.3 母平均の推定

(分布、母平均、母分散共に未知)(3)

- 近似の精度についての実験
  - 分布の近似
    - パラメータβの指数分布にしたがう確率変数W_iの標本平均の分布を求める。
    - 標本の大きさnは、1, 10, 100, 400
    - 標準化したW_iの標本平均の分布はn=100で標準正規分布に近くなる。
  - 平均、分散についての大数の法則の成立
    - シミュレーション実験の結果(β=1.5, 繰り返し数200回)
      - n=10のとき
        平均(β)の推定量の平均 1.52 (平均2乗誤差:0.238)
        分散(β^2)の推定量の平均 2.29 (平均2乗誤差:4.128)
      - n=100のとき
        平均(β)の推定量の平均 1.49 (平均2乗誤差:0.024)
        分散(β^2)の推定量の平均 2.28 (平均2乗誤差:0.506)

§6.4 最尤法

- §6.4.1 尤度関数
  - 今まで紹介してきた推定量
    推定に際して確率変数の分布の情報を用いていない。
    ⇒ 確率変数の分布の情報を用いれば、さらに「良い」推定量が得られる可能性がある。
  - 確率変数の分布に関する情報
    - 確率密度関数(連続型の場合)
    - 確率関数(離散型の場合)

§6.4.1 尤度関数(2)

- 確率密度関数
  - パラメータを所与として、ある値がどのくらいの「確からしさ」で出現するかを示したもの。
  - 例:正規分布
    - 平均μ、分散σ^2を決めたときに、xという値がどの程度出現するかを示した関数

$$f(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right)$$

§6.4.1 尤度関数(3)

- 確率密度関数→標本を抽出するときの「事前」の関係を示したもの。
- 標本が抽出されてしまった「事後」の状態をどう表すか?

⇩

- 同じ形の関数を、データを所与として、パラメータがある値となったときに、どの程度「尤もらしい」かを示した関数と読み替える。⇒ 尤度（ゆうど）関数

§6.4.1 尤度関数(4)

- **尤度関数** likelihood function
  - 正規分布の例：データxを所与としたときに、どのようなμ，σ²がもっともらしいかの程度を表している。

$$L(\mu,\sigma^2 \mid x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

§6.4.2 最尤推定量

Maximum Likelihood Estimator

- 尤度を最大とするパラメータの推定量
  ＝確率変数の分布情報を用いた推定量

⇩

最尤推定量

- 同じ確率分布にしたがうn個の独立な標本の尤度⇒n個の尤度関数の積

$L(\theta \mid x_1,x_2,\ldots,x_n)=L(\theta \mid x_1)\cdots L(\theta \mid x_n)$

§6.4.2 最尤推定量（2）

- 最尤推定量

  $\max L(\theta \mid x_1,x_2,\ldots,x_n)$

  を満たすθで与えられる。
- 例：x_1,x_2が互いに独立にN(μ,1)にしたがう場合
  - 尤度関数

$$L(\mu \mid x_1,x_2)=L(\mu \mid x_1)\times L(\mu \mid x_2)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x_1-\mu)^2}{2}\right)\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x_2-\mu)^2}{2}\right)$$

§6.4.2 最尤推定量（3）

- 最大化の1階の条件：$\frac{\partial L}{\partial \mu}=0$
- しかし、指数関数の微分は面倒。
  - 尤度の最大化ではなく、対数尤度の最大化を考える。

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu}=\frac{\partial \log L}{\partial L}\times\frac{\partial L}{\partial \mu}=\frac{1}{L}\times\frac{\partial L}{\partial \mu}=0$$

§6.4.2 最尤推定量(4)

- 対数尤度関数は

$$\log L(\mu \mid x_1,x_2)=\log L(\mu \mid x_1)+\log L(\mu \mid x_2)$$
$$=-\log 2\pi-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(x_i-\mu)^2$$

と表現できる。

- 対数尤度関数log *L*をμで偏微分すると

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu}=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}2(-1)(x_i-\mu)=0$$

これより１階の条件を満たすμを$\hat{\mu}$であらわすと、

$\hat{\mu}=\frac{x_1+x_2}{2}$. この場合、最尤推定量は算術平均に一致する。