第21回 7月7日の授業内容

- §6.4 最尤法
  - §6.4.3 補足説明
- §7. 母数の検定
  - §7.1 仮説検定の基礎概念
  - §7.2 母平均の検定 (母分散が既知)
  - §7.3 母平均の検定 (母分散が未知)

7/7/09 1

§7.1 仮説検定の基礎概念

- 統計的決定理論
  - 統計的推定と統計的検定の双方を含む統一的概念
  - 考え方
    - 統計家(Statistician)が標本データに基づき、未知の母数(unknown parameter)に対し判断ないし行動(=決定) を行う。
    - 統計家の決定の集合を決定空間(decision space)と呼ぶ。
      - 推定の場合、決定空間は母数空間に一致
      - 検定の場合、決定空間は {棄却, 受容} という{0,1}空間となる

7/7/09 2

§7.1 仮説検定の基礎概念(2)

- 統計的検定
  - 標本データに基づき、<u>或る説</u>についての<u>判断 (=決定)</u> を行うこと。

↓

- 「或る説」 → 「仮説」
- 「判断」 → 「シロ」か「クロ」か「信念の程度」を伴う

7/7/09 3

§7.1 仮説検定の基礎概念(3)

- 仮説 (hypothesis) の設定
  - まず、以下の二つの排反する仮説を構成する。
  - <u>帰無仮説 null hypothesis</u>
    - 「無に帰したい」=「否定したい」仮説
  - <u>対立仮説 alternative hypothesis</u>
    - 帰無仮説と排反する仮説=「どちらかといえば肯定したい」仮説

7/7/09 4

§7.1 仮説検定の基礎概念(4)

- 検定統計量

仮説の真偽の判断基準となる統計量
  - 帰無仮説が正しいときの統計量の分布
  - 対立仮説が正しいときの統計量の分布

  を求め、その二つの分布と、実際に得られた統計量の値から仮説の真偽を判断。

↓

統計的検定

7/7/09 5

§7.1 仮説検定の基礎概念(5)

- 有意水準 significance level
  - 帰無仮説が単純であっても、対立仮説が単純でない(=複合仮説) である場合には、対立仮説の起こる可能性の評価が事実上不可能。

↓

  - 帰無仮説の真偽についての「信念の程度」を予め決めておく。→有意水準
    - 慣例として10%、<u>5%</u>、1%を設定。
    - 有意水準=帰無仮説が正しいときに誤って棄却(=否定)してしまう確率 「信念の程度」

7/7/09 6

§7.2 母平均の検定 (母分散が既知)

- 母平均μの検定
  - 標本データ X_i が独立の正規分布にしたがう場合
  - 母平均の推定量 $\hat{\mu}=\overline{X}_n$ (標本平均) を用いて検定
  - 仮説
    - 帰無仮説 H_0: μ＝u (例えばu＝5)
    - 対立仮説 H_1: μ＞u
  - 有意水準: α (×100%) :慣例として%表示

§7.2 母平均の検定 (母分散が既知) (2)

- 検定例:発酵時間
  - X_i～N (μ,16.9) であるものとする。
  - 10個からなる標本データ:

    46, 39, 40, 41, 33, 35, 45, 43, 40, 38

  仮説
    - 帰無仮説 H_0: μ＝36
    - 対立仮説 H_1: μ＞36
  - 有意水準: 0.05 (=5%)

§7.2 母平均の検定 (母分散が既知) (3)

- 検定例:発酵時間 (続)
  - 母平均の推定量の分布
    - $\hat{\mu}=\overline{X}_{10}\sim \mathrm{N}(\mu,1.69)$
  - 帰無仮説が正しいときの母平均推定量の分布
    - $\hat{\mu}=\overline{X}_{10}\sim \mathrm{N}(36,1.69)$
  - 帰無仮説が正しいときに母平均推定量が推定値40以上である確率 ← 標準正規分布表から算出

    $\mathrm{P}(\overline{X}_{10}>40)=\mathrm{P}((\overline{X}_{10}-36)/1.3>(40-36)/1.3)$

    $=\mathrm{P}(Z>3.08)=1-.9990=0.0010$
  - 結論: 0.0010＜0.05＝α より
    <u>帰無仮説を棄却</u>

<0.05=α

§7.3 母平均の検定 (母分散が未知)

- 母分散σ²が未知の場合でも、母平均μに関する仮説検定は、母分散σ²が既知の場合とほぼ同様。
- 異なる点 ⇒ 検定統計量 (=基準化した算術平均) の分布
  - σ²が既知: 標準正規分布 $\dfrac{\overline{X}_n-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\sim \mathrm{N}(0,1)$
  - σ²が未知: 自由度n-1のt分布 $\dfrac{\overline{X}_n-\mu}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}}\sim t(n-1)$

§7.3 母平均の検定 (母分散が未知) (2)

- 検定例:発酵時間
  - X_i～N (μ, σ²) であるものとする。
  - 10個からなる標本データ:

    46, 39, 40, 41, 33, 35, 45, 43, 40, 38

  仮説
    - 帰無仮説 H_0: μ＝36
    - 対立仮説 H_1: μ＞36
  - 有意水準: 0.05 (=5%)

§7.3 母平均の検定 (母分散が未知) (3)

- 検定例:発酵時間 (続)

$$Q=\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}}\sim t(n-1)$$

ところで、$\sqrt{\hat{\sigma}^2/10}=\sqrt{16.67/10}=1.29$、帰無仮説より
$\mu=36$。また母平均の推定値は$\overline{X}_{10}=40$。
よって、 $\mathrm{P}(Q>(40-36)/1.29)=\mathrm{P}(Q>3.10)$
有意水準は5%であるから、自由度9のt分布表より、
$\mathrm{P}(Q>1.833)=0.05\ >\ \mathrm{P}(Q>3.10)$
よって帰無仮説$\mu=36$は有意水準5%で棄却される
(採択されない)。