第23回 7月14日の授業内容

- § 7. 母数の検定
  - § 7.8 二標本問題 (平均の同等性の検定)

7/14/09 1

§ 7.8 二標本問題 (平均の同等性の検定)

- 問題設定
  - n個のデータからなる標本Aとm個のデータからなる標本Bを考えよう。
  - <u>標本A、標本Bは以下の正規母集団からのランダム標本であるとする。</u>

$$\text{標本}A: X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \quad i = 1, \ldots, n$$

$$\text{標本}B: Y_j \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \quad j = 1, \ldots, m$$

7/14/09 2

§ 7.8 二標本問題 (平均の同等性の検定) (2)

- 仮説
  - 標本Aに対応する母集団の平均 (母平均) μ_X と標本Bに対応する母平均 μ_Y が等しいかどうかを検定したい。
  - 帰無仮説と対立仮説

$$\begin{cases} H_0: \mu_X = \mu_Y \\ H_1: \mu_X \neq \mu_Y \\ H_2: \mu_X < \mu_Y \quad (\text{or} \quad H_2: \mu_X > \mu_Y) \end{cases}$$

7/14/09 3

§ 7.8 二標本問題 (平均の同等性の検定) (3)

- 検定統計量の導出
  - μ_X, μ_Y の推定量の分布
    - μ_X の推定量として標本平均 $\hat{\mu}_X = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ を採用すると、$\hat{\mu}_X = \overline{X}_n \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2/n)$
    - 同様に μ_Y の推定量として標本平均 $\hat{\mu}_Y = \overline{Y}_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i$ を採用すると、$\hat{\mu}_Y = \overline{Y}_n \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2/m)$
    - 以上より

$$d \equiv \overline{X}_n - \overline{Y}_m \left(= \hat{\mu}_X - \hat{\mu}_Y\right) \sim \mathrm{N}\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}\right)$$

7/14/09 4

§ 7.8 二標本問題 (平均の同等性の検定) (4)

- 帰無仮説H_0が正しいときの統計量dの分布

$$d \equiv \overline{X}_n - \overline{Y}_m \sim \mathrm{N}\left(0, \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}\right)$$

  を用いて検定を行なう。
- <u>① σ_X^2, σ_Y^2 が共に既知の場合</u>

$$r = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}}$$

は H_0が正しければ標準正規分布 N(0,1)にしたがう

次ページへ

7/14/09 5

§ 7.8 二標本問題 (平均の同等性の検定) (5)

前ページより

- 対立仮説がH_1であるとき、
  - Φ (r) < α/2 (r<0のとき)
  - または
  - 1−Φ (r) < α/2 (r>0のとき)
  - であればH_0を棄却
- 対立仮説が $H_2: \mu_X < \mu_Y$ であるとき、
  - Φ (r) < α (r<0)
  - であれば、H_0を棄却

7/14/09 6

§7.8 二標本問題 (平均の同等性の検定) (6)

– ② $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ であるが未知の場合

σ^2 を推定量 $\hat{\sigma}^2$ で置き換える。

二つの標本データからσ^2を推定

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 + \sum_{j=1}^{m}(Y_j - \bar{Y}_m)^2}{n+m-2}$$

□ H_0が正しいとき (H_0のもとでは)

$$\tau = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})}} \sim t(n+m-2)$$

自由度$n+m-2$のt分布

次ページへ

§7.8 二標本問題 (平均の同等性の検定) (7)

前ページより

□対立仮説がH_1であるとき、

$\tau < -t_{\alpha/2}(n+m-2)$ ($\tau < 0$のとき)

または

自由度$n+m-2$のt分布の上側$\alpha/2$点

$\tau > t_{\alpha/2}(n+m-2)$ ($\tau > 0$のとき)

であればH_0を棄却

□対立仮説が $H_2: \mu_X < \mu_Y$ であるとき、

$\tau < -t_{\alpha}(n+m-2)$ ($\tau < 0$のとき)

であれば、H_0を棄却

§7.8 二標本問題 (平均の同等性の検定) (8)

– ③ $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ でかつ未知の場合

□厳密には、この場合の検定は結構やっかい

– $\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2,\ \hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(Y_j - \bar{Y}_m)^2$

で分散を推定し、$\tilde{r} = \dfrac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{m}}}$

を計算しても、H_0 の下でt分布にはしたがわない

Behrens=Fisher Problem

次ページへ

§7.8 二標本問題 (平均の同等性の検定) (9)

前ページより

□n, mがともに大きければ中心極限定理を使って①の方法で検定することができる。

□ $\boxed{\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2,\ \hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(Y_j - \bar{Y}_m)^2}$

として分散を推定。

□ $\tilde{r} = \dfrac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{m}}}$ はH_0が正しければ$n, m \to \infty$のとき N(0,1)にしたがう。

それぞれの標本で母分散が異なるので、標本毎に分散を推定

§7.8 二標本問題 (平均の同等性の検定) (10)

□ 標本A,Bの分布が正規分布でない場合

CLTを用い、漸近正規性に基づく検定を行う

– σ_X^2, σ_Y^2 が既知の場合
  r は漸近的 ($n, m \to \infty$) にN(0,1)にしたがう

– $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ であるが未知の場合
  τ は漸近的 ($n, m \to \infty$) にN(0,1)にしたがう

– $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ であり、未知の場合
  $\tilde{r}$ は漸近的 ($n, m \to \infty$) にN(0,1)にしたがう

§7.8 二標本問題 (平均の同等性の検定) (11)

□ 検定例

– あるカフェチェーンのアルバイトの時給

□首都圏 (100店舗) $\hat{\mu}_m = 902,\ \hat{\sigma}_m^2 = 3600$

□関西圏 (60店舗) $\hat{\mu}_k = 883,\ \hat{\sigma}_k^2 = 3840$ と推定

□検定する仮説 $H_0: \mu_m = \mu_k$ vs $H_1: \mu_m > \mu_k$

□検定統計量 CLTよりH_0の下でN(0,1)にしたがう

$$\tilde{r} = \frac{\hat{\mu}_m - \hat{\mu}_k}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_m^2}{100} + \frac{\hat{\sigma}_k^2}{60}}} = \frac{902-883}{\sqrt{\frac{3600}{100} + \frac{3840}{60}}} = \frac{19}{\sqrt{36+64}} = 1.9$$

□有意水準5%とすると、N(0,1)の上側5%点は1.64
よってH_0を棄却