第24回　7月15日の授業内容

- §7．母数の検定
  - §7.9　その他の検定
    - §7.9.1 成功確率の検定
    - §7.9.2 独立性の検定（χ^2適合度検定）

§7.9.1 成功確率の検定

- 成功確率や母集団比率についての検定
  - 母平均の検定の枠組みで可能
  - 但し、標本データは「二項分布」からのランダム標本
    ⇒ 漸近正規性に基づく検定
  - <u>検定統計量の分布の導出</u>
    $X_i \sim Bin(1, p)$　であるから　$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n, p)$
    したがって、$n\to\infty$のとき、
    $\bar{X}_n \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$　とすると　$\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$

§7.9.1 成功確率の検定(2)

- 一標本問題
  - H_0: $p=p_0$ vs. H_1: $p\neq p_0$ の場合
    - H_0 のもとでは、
      $$z \equiv \frac{\bar{X}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$
    - よって、有意水準をαとしたとき、
      $z > \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$　または　$z < \Phi^{-1}(\alpha/2)$ のとき、H_0を棄却
      すなわち
      $1-\Phi(z) < \alpha/2$　または　$\Phi(z) < \alpha/2$ のとき、H_0を棄却

$z>0$のケース　　$z<0$のケース

§7.9.1 成功確率の検定(3)

- H_0: $p=p_0$ vs. H_2: $p>p_0$ の場合
  - 有意水準をαとしたとき、
    $z > \Phi^{-1}(1-\alpha)$　すなわち　$1-\Phi(z) < \alpha$ のとき
    H_0を棄却
- H_0: $p=p_0$ vs. H_3: $p<p_0$ の場合
  - 有意水準をαとしたとき、
    $z < \Phi^{-1}(\alpha)$　すなわち　$\Phi(z) < \alpha$ のとき
    H_0を棄却

§7.9.1 成功確率の検定(4)

- 二標本問題
  - 標本A：$\{X_1,\ldots,X_n\}$
    大きさnのBin(1,p_A)からのランダム標本
  - 標本B：$\{Y_1,\ldots,Y_m\}$
    大きさmのBin(1,p_B)からのランダム標本
  - 仮説
    - 帰無仮説 (H_0)：　$p_A = p_B$
    - 対立仮説 (H_1)：　$p_A \neq p_B$

§7.9.1 成功確率の検定(5)

- 検定統計量の分布
  $$d \equiv \frac{(\bar{X}_n - p_A)-(\bar{Y}_m - p_B)}{\sqrt{\frac{p_A(1-p_A)}{n} + \frac{p_B(1-p_B)}{m}}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$
- 帰無仮説 (H_0)：　$p_A = p_B$ のもとでは、
  $$\hat{d} = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\sqrt{\frac{\hat{p}_A(1-\hat{p}_A)}{n} + \frac{\hat{p}_B(1-\hat{p}_B)}{m}}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

$\hat{d} > \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$　または $\hat{d} < \Phi^{-1}(\alpha/2)$ のとき、H_0を棄却

有意水準をαに設定

§7.9.2 独立性の検定（χ²適合度検定）

- クロス集計表と「要因」の「独立性」
  - クロス集計表
    - （二つの）カテゴリー変数の同時分布表
  - 二つのカテゴリー変数の独立性を検証するには

    ⇩

    「独立性」の検定（χ²適合度検定）

		変数X 要因X_1	要因X_2	計
変数Y	要因Y_1	15	21	36
	要因Y_2	8	16	24
	要因Y_3	12	48	60
計		35	85	120

§7.9.2 独立性の検定(2)

- 検定
  - 仮説
    - 帰無仮説 (H_0)： XとYは独立
    - 対立仮説 (H_1)： XとYは従属
  - 帰無仮説 (H_0)が正しいときのセル(i,j)の度数

$$E_{ij} = n \times \frac{W_i}{n} \times \frac{Z_j}{n}$$

ここで

$$W_i = \sum_{j=1}^{l} O_{ij}, \quad Z_j = \sum_{i=1}^{k} O_{ij},$$

		変数X 要因X_1	…	要因X_k	計
変数Y	要因Y_1	O_{11}	…	O_{1k}	Z_1
	…		O_{ij}		…
	要因Y_l	O_{l1}		O_{lk}	Z_l
計		W_1	…	W_k	n

§7.9.2 独立性の検定(3)

- 検定統計量

$$\delta = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{\left(O_{ij} - E_{ij}\right)^2}{E_{ij}}$$

帰無仮説の下でδは自由度$(k-1) \times (l-1)$のχ²分布に従う

§7.9.2 独立性の検定（4）

- 数値例

$$\delta = \frac{(15-10.5)^2}{10.5} + \frac{(21-25.5)^2}{25.5} + \frac{(8-7)^2}{7} + \frac{(16-17)^2}{17} + \frac{(12-17.5)^2}{17.5} + \frac{(48-42.5)^2}{42.5}$$
$$= 1.93 + 0.79 + 0.14 + 0.06 + 1.73 + 0.71$$
$$= 5.36$$

自由度2のχ²分布の上側5%点は5.99

⇩

$\delta = 5.36 < 5.99$

より帰無仮説は棄却できない

⇩

結論「XとYは独立である」

		変数X 要因X_1	要因X_2	計
変数Y	要因Y_1	15 10.5	21 25.5	36
	要因Y_2	8 7	16 17	24
	要因Y_3	12 17.5	48 42.5	60
計		35	85	120

赤数字は期待度数