第25回　7月21日の授業内容

- §8.　線形モデル
  - §8.1 線形回帰モデル

§8.1 線形回帰モデル

- 因果関係の分析モデル
  - 気温の上昇　⇒　清涼飲料水（ビール類）の消費上昇という関係をモデル化することを考えよう。
  - 気温 T_i、消費量 C_i として、

$$C_i = \beta_0 + \beta_1 T_i + u_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

というモデルを考える。ここで u_i は

$$\mathrm{E}(u_i) = 0,\ \mathrm{Var}(u_i) = \omega^2 < +\infty$$

である確率変数とする。

§8.1　線形回帰モデル(2)

- $C_i = \beta_0 + \beta_1 T_i + u_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$

というモデルは、消費量 C_i を気温 T_i の1次関数で表したものに誤差 u_i を加えたもの。

⇩

線形モデル（Linear Model）

二標本問題もこのクラスに含まれる

便利なモデル

§8.1　線形回帰モデル(3)

- C_i の期待値と条件付期待値
  - C_i の期待値

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(C_i) &= \beta_0 + \beta_1 \mathrm{E}(T_i) + \mathrm{E}(u_i) \\ &= \beta_0 + \beta_1 \mathrm{E}(T_i)\end{aligned}$$

  - T_i を条件としたときの C_i の条件付期待値

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(C_i \mid T_i) &= \beta_0 + \beta_1 T_i + \mathrm{E}(u_i \mid T_i) \\ &= \beta_0 + \beta_1 T_i\end{aligned}$$

$\mathrm{E}(u_i|T_i)=\mathrm{E}(u_i)=0$,
$\mathrm{Var}(u_i|T_i)= \mathrm{Var}(u_i) = \omega^2$
という仮定をおく

§8.1　線形回帰モデル(4)

- 線形回帰モデルの推定(1)
  - $\mathrm{E}(u_i| T_i)=\mathrm{E}(u_i)=0$ という仮定より、$\mathrm{E}(u_i T_i)=0$

$$\mathrm{Cov}(u_i T_i) = \mathrm{Cov}(C_i, T_i) - \beta_1 \mathrm{Var}(T_i) = 0$$

よって　$\hat{\beta}_1 = \dfrac{\mathrm{Cov}(C_i, T_i)}{\mathrm{Var}(T_i)}$

モーメント法推定量(Method of Moment Estimator)

§8.1　線形回帰モデル(5)

- 線形回帰モデルの推定(2)
  - (T_i, C_i) のデータから、β_0, β_1（そして ω^2）を推定

⇩

  - 最小2乗法Ordinary Least Squares：誤差 u_i の2乗和を最小にする β_0, β_1

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (C_i - \overline{C}_n)(T_i - \overline{T}_n)}{\sum_{i=1}^{n} (T_i - \overline{T}_n)^2}, \qquad \hat{\beta}_0 = \overline{C}_n - \hat{\beta}_1 \overline{T}_n$$

7/21授業中訂正スライド

§8.1 線形回帰モデル(6)

- 最小2乗推定量の性質
  - $\hat{\beta}_i$ は、u_i に関する古典的仮定の下で、不偏性、一致性、効率性をもつ。
- 最小2乗推定量の分布
  - $u_i \sim \mathrm{N}(0, \varpi^2)$ のとき、 $\tau = \dfrac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\hat{\mathrm{V}}\mathrm{ar}(\hat{\beta}_1)}} \to t(n-2)$
  - u_i の分布が未知のとき、n→∞のときCLTから $\tau = \dfrac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\hat{\mathrm{V}}\mathrm{ar}(\hat{\beta}_1)}} \to \mathrm{N}(0,1)$

7/21授業中訂正スライド

§8.1 線形回帰モデル(7)

- 最小2乗推定量の分散
  - $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) = \dfrac{\varpi^2}{\sum_{i=1}^{n}(T_i - \overline{T}_n)^2}$
  - ϖ^2 が未知のとき、

$$\hat{\mathrm{V}}\mathrm{ar}(\hat{\beta}_1) = \frac{\hat{\varpi}^2}{\sum_{i=1}^{n}(T_i - \overline{T}_n)^2},$$

where $\hat{\varpi}^2 = \dfrac{1}{n\text{-}2} \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2$ and $\hat{u}_i = C_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 T_i$

§8.1 線形回帰モデル(8)

- β_1 についての仮説検定
  - $\begin{cases} H_0: \beta_1 = 0 \\ H_1: \beta_1 \neq 0 \end{cases}$
  - u_i の分布にもとづいて検定統計量 τ の分布を導出。