エコノメトリックスI （セッション第 12 回）

盛本圭一 [1,2]

[1] 大阪大学経済学研究科
[2] 日本学術振興会特別研究員

2010 年 7 月 29 日

問題 1 ：χ^2 分布

確率変数 X が標準正規分布にしたがう、すなわち $X \sim N(0,1)$ であるとき、$Y = X^2$ の確率密度関数を導出しなさい。

解答例

- $X = 0$ は分枝点だから、これを除外して $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 上での変換を考える。このとき、Y のサポートは $S_Y = \mathbb{R}_{++}$ である。$\mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}_{--} \cup \mathbb{R}_{++}$ という分割を考えると

$$\begin{aligned} x &= -\sqrt{y} \text{ for } x \in \mathbb{R}_{--}, \\ x &= +\sqrt{y} \text{ for } x \in \mathbb{R}_{++}. \end{aligned}$$

- したがって、Y の密度関数は S_Y 上で

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(-\sqrt{y}) \cdot \left| -\frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \right| + f_X(+\sqrt{y}) \cdot \left| \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-\sqrt{y})^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} y^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

問題 2 ：F 分布の変換

確率変数 Z が自由度 $(1, k)$ の F 分布にしたがう、すなわち $Z \sim F(1,k)$ であるとき、$W = \sqrt{Z}$ の確率密度関数を導出しなさい。

解答例

- $Z \sim F(1,k)$ より、$S \sim \chi^2(1)$, $T \sim \chi^2(k)$ である独立な確率変数 S, T によって、Z は

$$Z = \frac{S/1}{T/k}$$

と表現される。

- したがって、W は

$$W = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{T/k}}$$

と表現される。

解答例：続き

- (S,T) のサポートは $\mathbb{R}^2_{++}$.
- 一方、S,T の独立性により、(S,T) の同時密度関数はサポート上で

$$f_{S,T}(s,t)=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})}s^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{s}{2}\right)\times\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})}t^{\frac{k}{2}-1}\exp\left(-\frac{t}{2}\right).$$

- ここで変数変換 $(Y,U)=g(S,T)=(\sqrt{S}/\sqrt{T/k},T)'$ を考えると、逆変換 $(S,T)=g^{-1}(Y,U)=(Y^2U/k,U)'$ が存在し、その Jacobian を $J_{g^{-1}}$ として

$$\begin{aligned}|\det(J_{g^{-1}}(y,u))| &= \frac{2yu}{k},\quad \forall(y,u)\in S_{Y,U},\\ S_{Y,U} &= \mathbb{R}^2_{++}.\end{aligned}$$

解答例：続き

- したがって、(Y,U) の同時密度関数は $(y,u)\in S_{Y,U}$ に対し

$$\begin{aligned}f_{Y,U}(y,u) &= f_{S,T}\left(\frac{y^2u}{k},u\right)\times\frac{2yu}{k}\\ &= \frac{1}{\sqrt{k\pi}2^{\frac{k-1}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})}\exp\left(-\left(1+\frac{y^2}{k}\right)\frac{u}{2}\right)u^{\frac{k-1}{2}}.\end{aligned}$$

- これを u について積分することにより（Γ 分布の特性関数の導出と同様の変数変換を施せ）、Y の密度関数は

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \int_0^\infty f_{Y,U}(y,u)du\\ &= \frac{2\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\sqrt{k\pi}\Gamma(\frac{k}{2})}\left(1+\frac{y^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}},\quad \forall y\in\mathbb{R}_{++}.\end{aligned}$$

問題 3 ：大数の弱法則（標本平均の一致性）

$X_i\sim N(\mu,1)$ である独立な確率変数列 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ を考える。このとき、平均 μ の推定量を

$$\hat{\mu}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$$

で与えるものとする。このとき、$\hat{\mu}_n$ が μ に確率収束することを示しなさい。

考え方

$\hat{\mu}_n$ の分布を求め、Chebyshev の不等式を利用する.

定理（Chebyshev の不等式）

確率変数 X が分散 $\sigma^2<\infty$ を持つものとし、その期待値（分散が存在するので必ず存在する）を μ とする。このとき、任意の $\delta>0$ に対して

$$P(|X-\mu|\geq\delta\sigma)\leq\frac{1}{\delta^2}.$$

- もちろん、興味があるのは $\delta>1$ のとき.
- この不等式が言っているのは、確率変数の平均からの乖離が標準偏差よりも大きくなることは、その倍数の 2 乗のスピードで少なくなるということである.

解答例

- $X_i\sim N(\mu,1)$ より、各 n に対して $\hat{\mu}_n\sim N(\mu,n^{-1})$.
- Chebyshev の不等式を用いれば、任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$\begin{aligned}P(|\hat{\mu}_n-\mu|\geq\varepsilon) &= P\left(|\hat{\mu}_n-\mu|\geq\varepsilon\sqrt{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2 n}\\ &\to 0 \quad\text{as}\quad n\to\infty.\quad\square\end{aligned}$$

復習：関数列の収束

定義（各点収束と一様収束）

1. $X_n:\Omega\to\mathbb{R}\,(n=1,2,\ldots)$ が $X:\Omega\to\mathbb{R}$ に各点収束するとは

$$\begin{aligned}&\forall\omega\in\Omega,\forall\varepsilon>0,\exists N(\omega,\varepsilon)\in\mathbb{N}\text{ such that}\\ &n\geq N(\omega,\varepsilon)\implies|X_n(\omega)-X(\omega)|<\varepsilon.\end{aligned}$$

2. $X_n:\Omega\to\mathbb{R}\,(n=1,2,\ldots)$ が $X:\Omega\to\mathbb{R}$ に一様収束するとは

$$\begin{aligned}&\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\text{ such that}\quad\forall\omega\in\Omega,\\ &n\geq N(\varepsilon)\implies|X_n(\omega)-X(\omega)|<\varepsilon.\end{aligned}$$

- 各点収束は、場所によって収束スピードが違ってもよい.（イメージは普通の駆けっこ）
- 一様収束は、グラフ全体が同じスピードで収束.（イメージは 20 人 21 脚. 「足並みそろえて・お手々つないで」収束する.）

概収束

定義（概収束）

確率変数列 $X_n\,(n=1,2,\ldots)$ が確率変数 X に概収束するとは、次のような事象 $\Omega' \subset \Omega$ が存在することである．

$$P(\Omega')=1 \text{ and } \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)=X(\omega),\ \forall\omega\in\Omega'.$$

- 概収束の条件は、次のように表現されることもある．
  - $P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$
  - $\forall\varepsilon>0,\ \lim_{N\to\infty} P(|X_n - X|<\varepsilon, \forall n\geq N)=1$
- X_n が X に概収束することを $X_n \overset{a.s.}{\to} X$ あるいは $X_n \to X$, a.s. あるいは $X_n \to X$, a.e. などと表す．

第 12 回前回の解説 確率変数の収束 大数の法則と中心極限定理 収束概念の定義と関係 確率変数の収束の具体例 確率変数の収束に関する重要事項

確率収束

定義（確率収束）

次の条件が成立するとき、確率変数列 $X_n\,(n=1,2,\ldots)$ は確率変数 X に確率収束するという．

$$\forall\varepsilon>0,\ \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X|<\varepsilon)=1$$

- $X_n\,(n=1,2,\ldots)$ が X に確率収束することを、$X_n \overset{p}{\to} X$ あるいは $\operatorname{plim}_{n\to\infty} X_n = X$ あるいは $X_n \to X$, in prob. と表す．

盛本圭一 エコノメトリックス I （セッション第 12 回）

第 12 回前回の解説 確率変数の収束 大数の法則と中心極限定理 収束概念の定義と関係 確率変数の収束の具体例 確率変数の収束に関する重要事項

概収束と確率収束の関係

- 概収束は、ほとんどすべてのケースにおいて、十分大きなすべての n に対して X_n が X の ε-近傍から外れないことを意味する。言い換えると、X_n のパスそのものが X に近づいていくことである。
- 確率収束は、X_n が X の ε-近傍にある確率が極限において 1 に近づくということを言っているだけなので、概収束のようなパスそのものの漸近を意味しない。
- 概収束と確率収束の間には、次のような関係がある。

定理（概収束と確率収束の関係）

1. $X_n\,(n=1,2,\ldots)$ が X に概収束するならば、確率収束もする。
2. $X_n\,(n=1,2,\ldots)$ が X に確率収束するならば、$X_n\,(n=1,2,\ldots)$ の部分列で X に概収束するものが存在する。

盛本圭一 エコノメトリックス I （セッション第 12 回）

第 12 回前回の解説 確率変数の収束 大数の法則と中心極限定理 収束概念の定義と関係 確率変数の収束の具体例 確率変数の収束に関する重要事項

分布収束（法則収束）

定義（分布収束（法則収束））

次の条件が成り立つとき、確率変数列 $X_n\,(n=1,2,\ldots)$ が確率変数 X に分布収束（法則収束）するという．

（条件）

各 X_n の分布関数を F_n とするとき、X の分布関数 F の任意の連続点 x に対して $\lim_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)$.

- 分布収束は単に分布が近づくということを言っているだけなので、確率変数どうしの距離が近いかどうかとは違う．
- $X_n \overset{d}{\to} X$ あるいは $X_n \to X$ in law などと表す．

定理（分布収束と確率収束の関係）

$X_n\,(n=1,2,\ldots)$ が X に確率収束するならば、分布収束もする．

盛本圭一 エコノメトリックス I （セッション第 12 回）

第 12 回前回の解説 確率変数の収束 大数の法則と中心極限定理 収束概念の定義と関係 確率変数の収束の具体例 確率変数の収束に関する重要事項

確率収束の例

確率収束する（が概収束しない）確率変数

確率変数列 $X_n\,(n=1,2,\ldots)$ はそれぞれ独立で、0 か 1 の値だけをとるものとし、その分布は次で与えられるとする．

$$P(X_n=0)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{for } n=1,2,\\ \frac{j}{j+1} & \text{for } n=2^{j-1}+1,\ldots,2^j,\ j\geq 2.\end{cases}$$

- $n\to\infty$ のとき $j\to\infty$ だから、明らかに $X_n \overset{p}{\to} 0$.
- しかし、$n=2^{j-1}+1,\ldots,2^j,\ j\geq 2$ の中で少なくとも 1 回 1 をとる確率は $1-(j/(j+1))^{2^{(j-1)}}$ であり、これは 1 に収束する．
- したがって、$X_n \overset{a.s.}{\to} 0$ は成り立たない．
- 一般に収束がすごく速くないと概収束にはならない．多くの場合、平均化のようなある種の集計をした確率変数でないと難しい．（大数の強法則）

盛本圭一 エコノメトリックス I （セッション第 12 回）

第 12 回前回の解説 確率変数の収束 大数の法則と中心極限定理 収束概念の定義と関係 確率変数の収束の具体例 確率変数の収束に関する重要事項

分布収束するが確率収束しない例

例：分布収束するが確率収束しない確率変数列

確率空間 $([0,1],\mathscr{B}(\mathbb{R}),P)$ で P は $[0,1]$ 上の一様分布を与える確率測度とする．このとき次のような確率変数列 $X_n\,(n=1,2,\ldots)$ を考える．

$$X_n(\omega)=\begin{cases}1 & \text{for } \omega\in[0,1/2],\\ 0 & \text{elsewhere,}\end{cases} \quad \text{if } n \text{ is odd.}$$

$$X_n(\omega)=\begin{cases}1 & \text{for } \omega\in(1/2,1],\\ 0 & \text{elsewhere,}\end{cases} \quad \text{if } n \text{ is even.}$$

- 任意の n について $P(X_n=0)=P(X_n=1)=1/2$ だから各 X_n の分布はすべて同じなので、$X_n \overset{d}{\to} X_1$.
- しかし、n が任意の偶数のとき $P(|X_n-X_1|<1)=0$ だから、X_n は確率収束しない．

盛本圭一 エコノメトリックス I （セッション第 12 回）

特性関数と分布収束

定理（特性関数による分布収束の特徴づけ、Glivenko）

確率変数列 $X_n\,(n=1,2,...)$ および確率変数 X の特性関数をそれぞれ $\psi_n\,(n=1,2,...)$, ψ とする．このとき、次の二つは同値である．

1. ψ_n が ψ に各点収束する．
2. X_n が X に分布収束する．

- この事実は中心極限定理の証明などに応用される．

連続変換と確率変数の収束

定理（連続関数による収束の保存）

$X_n\,(n=1,2,...)$ を確率変数列、X を確率変数、$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を連続関数とする．このとき次が成立する．

1. $X_n \xrightarrow{a.s.} X \implies g(X_n) \xrightarrow{a.s.} g(X)$
2. $X_n \xrightarrow{p} X \implies g(X_n) \xrightarrow{p} g(X)$
3. $X_n \xrightarrow{d} X \implies g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$

- 例： $X_n\,(n=1,2,...)$ が $N(0,1)$ に分布収束すれば、X_n^2 は $\chi^2(1)$ に分布収束する．
- これを利用することで、$X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{d} Y$ ならば $X_n+Y_n \xrightarrow{d} X+Y$, $X_nY_n \xrightarrow{d} XY$, $X_n/Y_n \xrightarrow{d} X/Y$ などが示せる．（確率収束なども同様．）

大数の法則

定理（大数の強法則、Kolmogorov）

$X_n\,(n=1,2,...)$ を平均 μ の独立同一分布に従う確率変数列とする．このとき

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{a.s.} \mu.$$

定理（大数の弱法則、Chebyshev）

確率変数 $X_n\,(n=1,2,...)$ は共通の平均 μ と分散 σ^2 を持ち、無相関とする（$\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+\tau})=0,\ \forall t,\tau$）．このとき

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{p} \mu.$$

大数の法則：強法則 v.s. 弱法則

- 強法則:
  - i.i.d. であることを要求
  - モーメントは1次だけでよい
  - 標本平均は「概収束」
- 弱法則
  - （共通のモーメントと）無相関であることを要求
  - モーメントは2次まで必要
  - 標本平均は「確率収束」

大数の法則：数値例

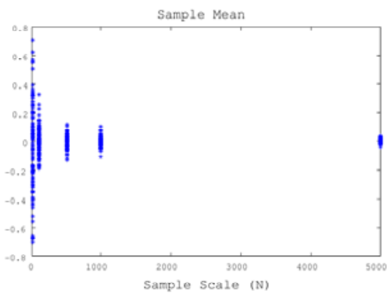

Figure: 標準正規分布から $N=10,100,500,1000,5000$ 個のサンプルを任意抽出し、その標本平均を計算する。これを各 N について100回繰り返し、結果をプロットする。サンプル数が増えるほど標本平均が真の平均に近い値をとることが多くなり、確率収束するのが分かる。

大数の法則の応用

標本分散の一致性

確率変数列 $X_1, X_2, ...$ は平均 μ・分散 σ^2 の分布からのランダム・サンプルであるとする。（ただし、$E(X_1^4)<+\infty$）このとき、標本分散 $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\bar{X}_n)^2$ は真の分散 σ^2 に確率収束する．

- $\hat{\sigma}_n^2$ を次のように書きかえる．

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \bar{X}_n^2\right)$$

- 大数の弱法則により、$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \xrightarrow{p} E(X_1^2)$ かつ $\bar{X}_n^2 \xrightarrow{p} \mu^2$.
- したがって、$\hat{\sigma}_n^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$.

中心極限定理

定理（中心極限定理）

$X_n\ (n = 1, 2, \ldots)$ を平均 μ・分散 σ^2 の独立同一分布に従う確率変数列とする．このとき

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right) \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

- 分布のよく分からない確率変数列に対しては、（上の定理の前提条件のもとで）とりあえず上のような基準化した形が作れないかどうかを考える．

中心極限定理の応用

応用例

先にあげた大数の法則の例にもどり、$T_n = (\bar{X}_n - \mu)/\sqrt{\hat{\sigma}_n^2/n}$ とおくと、$T_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$.

- T_n を次のように書きかえる．

$$T_n = \frac{\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2/\sigma^2}}.$$

- 中心極限定理より、上式の分子は $N(0, 1)$ に分布収束する．
- 大数の弱法則より $\hat{\sigma}_n^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$ だから、上式の分母は 1 に確率収束する．
- したがって、$T_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$.