

2010年度 エコノメトリックス I& 上級エコノメトリックス I 第11回宿題訂正版(2010年7月9日出題、7月13日訂正)

注意事項

提出期限: 7月16日(金)4時限終了時
必ず A4 サイズの紙で提出のこと。(サイズが異なるものは受け付けない)

問1

確率変数 Z がパラメータ α, β のガンマ分布にしたがう、すなわち $Z \sim \text{Ga}(\alpha, \beta)$ であるとき、次の問に答えなさい。

- (1) Z の特性関数 $\psi(\theta)$ を導出し

$$\psi(\theta) = \left(\frac{\beta}{\beta - i\theta} \right)^\alpha$$

となることを確認しなさい。

- (2) 特性関数を使って Z の平均および分散を求めなさい。
- (3) W_1, W_2, W_3 は互いに独立な確率変数であり、それぞれがパラメータ $\beta = 2$ の指数分布に従う、すなわち $W_i \sim \text{Exponential}(2)$ ($i = 1, \dots, 3$) であるものとする。このとき、 $V = W_1 + W_2 + W_3$ がガンマ分布にしたがうことを特性関数を用いて示しなさい。
- (4) (3) で求めた V の確率密度関数のグラフを描きなさい。

問2

確率変数 Y がパラメータ α, β のベータ分布にしたがう、すなわち $Y \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ であるとき、

$$E(Y) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad \text{Var}(Y) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

となることを示しなさい。

問 3

$k = 1, 2, \dots, n$ および $0 \leq p \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ に対して、

$$\int_p^1 \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} y^{k-1} (1-y)^{n-k} dy = \sum_{x=0}^{k-1} {}_n C_x p^x (1-p)^{n-x}$$

となることを示しなさい。(ベータ分布と二項分布の関係)

問 4

X_s を単位時間 $[0, s]$ の間に発生する事象 A の回数であるとする。 X_s がパラメータ $\lambda = ms$ のポアソン分布に従うとき、次の問に答えなさい。

- (1) S を事象 A の起きる間隔時間 (インターバル) であるとする ($S > 0$)。このとき、 $P(S > s)$ を求めなさい。
- (2) (1) の結果より、 S の密度関数を求め、どんな分布に従うか、答えなさい。