2010年度 エコノメトリックスI & 上級エコノメトリックスI
第12回講義 補足資料

2010年7月15日

補足1: Beta 分布の特性関数について

Beta 分布の特性関数は簡単な形で表すことはできないが、超幾何関数（級数）hypergeometric function の一つとして表現することができる。

まず、Kummer の合流型超幾何級数を定義しよう。

$$ {}_1F_1(\gamma;\delta;y) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma,n)}{(\delta,n)(1,n)} y^n $$

ここで、γ, δ は複素定数 ($\delta \notin Z_{\leq 0}$)、y は複素変数である。

また、記号 (c,n) は、

$$ (c,n) \equiv \begin{cases} 1 & \text{for } n = 0 \\ c(c+1)(c+2)\cdots(c+n-1) & \text{for } n \geq 1 \end{cases} $$

を表す演算であり、ガンマ関数を用いると

$$ (c,n) = \frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)} $$

になる。したがって $(1,n) = n!$ である。

証明は省くが、${}_1F_1(\gamma;\delta;y)$ は積分表示

$$ {}_1F_1(\gamma;\delta;y) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta-\gamma)} \int_0^1 t^{\gamma-1}(1-t)^{\delta-\gamma-1} e^{yt} dt $$

でも表現できる。

ベータ分布の特性関数は

$$ \psi(\theta) = \int_0^1 e^{i\theta x} \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx $$

で与えられるから、変形すると、

$$ \psi(\theta) = \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} e^{i\theta x} dx $$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta-\alpha)} x^{\alpha-1}(1-x)^{(\alpha+\beta)-\alpha-1} e^{i\theta x} dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, n)}{(\alpha+\beta, n)(1, n)} (i\theta)^n \\
&= {}_1F_1(\alpha; \alpha+\beta; i\theta)
\end{aligned}
$$

となり、超幾何関数の一つとして表すことができる。
(超幾何関数については、例えば 原岡喜重 (2002), 『超幾何関数 （数学の風景 7)』, 朝倉書店を参照のこと）

補足 2: 正規分布の期待値の導出

ここでは、板書した方法とは異なる期待値の導出を示す。
密度関数の定義より、

$$
1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\Bigl(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Bigr) dx
$$

が成立する。微分と積分が交換可能であれば、

$$
0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-(x-\mu)}{\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e\Bigl(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Bigr) dx
$$

となる。よって

$$
\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\Bigl(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Bigr) dx = \mathrm{E}(X)
$$

が得られる。