2010年度 エコノメトリックスI & 上級エコノメトリックスI
第13回講義補足資料

2010年7月21日

補足１　多変量正規分布について

第12回講義で示したように多変量正規分布の確率密度関数は次式で与えられる。

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m \mid \boldsymbol{\Sigma} \mid^{\frac{1}{2}}} \ \exp\Big(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\Big)$$

ここで

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \mathrm{E}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \mathrm{E}(x_1) \\ \vdots \\ \mathrm{E}(x_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\Sigma}$ は $\boldsymbol{x}$ の分散共分散行列であり

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{E}\{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\}$$

1.1 独立な２変量正規分布の場合

２変量正規分布の場合、$\boldsymbol{\Sigma}$ は

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

で表すことができる。ここで $\sigma_i^2 = \mathrm{Var}(x_i)$ $(i = 1, 2)$ であり、ρ は x_1 と x_2 の相関係数 $\rho = \mathrm{Cov}(x_1, x_2)/\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}$ である。

x_1 と x_2 が独立の場合、$\rho = 0$ となるから

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

よって、

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} (\sigma_1^2)^{-1} & 0 \\ 0 & (\sigma_2^2)^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mid \boldsymbol{\Sigma} \mid^{\frac{1}{2}} = (\sigma_1^2\sigma_2^2)^{\frac{1}{2}} = \sigma_1\sigma_2$$

したがって

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2 \mid \boldsymbol{\Sigma} \mid^{\frac{1}{2}}} \exp\Big(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\Big) \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2\,\sigma_1\sigma_2} \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\sigma_i^2}(x_i-\mu_i)^2\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\Big(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x_1-\mu_1)^2\Big) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\Big(-\frac{1}{2\sigma_2^2}(x_2-\mu_2)^2\Big) \\
&= f(x_1)\times f(x_2)
\end{aligned}
$$

が得られ、独立な確率変数 x_1、x_2 の同時確率密度変数の形で表現できることが確認できる。

1.2 （独立ではない）２変量正規分布の条件付分布と条件付期待値

$$
\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})
$$

のとき、x_2 を条件としたときの x_1、すなわち $x_1 \mid x_2$ の分布をもとめよう。
　条件付密度関数の定義より

$$
\begin{aligned}
f(x_1 \mid x_2) &= \frac{f(\boldsymbol{x})}{f(x_2)} \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2 \mid \boldsymbol{\Sigma} \mid^{\frac{1}{2}}} \exp\Big(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\Big) \times \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\Big(-\frac{1}{2\sigma_2^2}(x_2-\mu_2)^2\Big)\Big)^{-1} \\
&= \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi} \mid \boldsymbol{\Sigma} \mid^{\frac{1}{2}}} \exp\Big(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}) + \frac{1}{2\sigma_2^2}(x_2-\mu_2)^2\Big)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\mid \boldsymbol{\Sigma} \mid &= \sigma_1^2\sigma_2^2 - \rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2 = (1-\rho)\sigma_1^2\sigma_2^2 \\
\boldsymbol{\Sigma}^{-1} &= \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}) + \frac{1}{2\sigma_2^2}(x_2-\mu_2)^2 \\
= & -\frac{1}{2}\left\{\frac{(x_1-\mu_1)^2}{(1-\rho^2)\sigma_1^2} - 2\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)\rho}{(1-\rho^2)\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{(1-\rho^2)\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}(x_2-\mu_2)^2\right\} \\
= & -\frac{1}{2}\left\{\frac{(x_1-\mu_1)^2}{(1-\rho^2)\sigma_1^2} - 2\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)\rho}{(1-\rho^2)\sigma_1\sigma_2} + \frac{\rho^2(x_2-\mu_2)^2}{(1-\rho^2)\sigma_2^2}\right\} \\
= & -\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2}\left\{x_1^2 - 2x_1\mu_1 + \mu_1^2 - 2\frac{\sigma_1\rho}{\sigma_2}(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2) + \frac{\sigma_1^2\rho^2}{\sigma_2^2}(x_2-\mu_2)^2\right\} \\
= & -\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2}\left\{x_1 - (\mu_1 + \frac{\sigma_1\rho}{\sigma_2}(x_2-\mu_2))\right\}^2
\end{aligned}
$$

が得られる。よって x_2 を条件としたときの x_1 の確率密度関数は

$$f(x_1 \mid x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1)} \exp\Big(-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2}\left\{x_1 - (\mu_1 + \frac{\sigma_1\rho}{\sigma_2}(x_2-\mu_2)\right\}^2\Big)$$

となって、平均が $\mu_1 + \dfrac{\sigma_1\rho}{\sigma_2}(x_2-\mu_2)$、分散が $(1-\rho^2)\sigma_1^2$ の正規分布の密度関数と等しくなる。

ゆえに x_1 の条件付期待値と条件付分散はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{x_1}(x_1 \mid x_2) &= \mu_1 + \frac{\sigma_1\rho}{\sigma_2}(x_2-\mu_2) \\
\mathrm{Var}_{x_1}(x_1 \mid x_2) &= (1-\rho^2)\sigma_1^2
\end{aligned}$$

になる。

補足 2: F 分布の特性関数について (再掲)

板書でも示したように、F 分布の特性関数は教科書の記述 (p.169) にもあるように、従来

$$\psi(\theta) = {}_1F_1\left(\frac{k_1}{2}, \frac{k_2}{2}; -\frac{k_2}{k_1}i\theta\right)$$

であると言われてきた。しかし、Phillps (1982) がこれは誤りであることを指摘した。

正しくは、

$$\begin{aligned}
\psi(\theta) &= \frac{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}+\frac{k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)} \times \left[\frac{\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}+\frac{k_2}{2}\right)}\,{}_1F_1\left(\frac{k_1}{2}, 1-\frac{k_2}{2}; -\frac{k_2}{k_1}i\theta\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)}\left(-\frac{k_2}{k_1}i\theta\right)^{\frac{k_2}{2}}\,{}_1F_1\left(\frac{k_1}{2}+\frac{k_2}{2}, 1+\frac{k_2}{2}; -\frac{k2}{k_1}i\theta\right)\right] \\
&= {}_1F_1\left(\frac{k_1}{2}, 1-\frac{k_2}{2}; -\frac{k_2}{k_1}i\theta\right) + \frac{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}+\frac{k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)}\left(-\frac{k_2}{k_1}i\theta\right)^{\frac{k_2}{2}}\,{}_1F_1\left(\frac{k_1}{2}+\frac{k_2}{2}, 1+\frac{k_2}{2}; -\frac{k2}{k_1}i\theta\right)
\end{aligned}$$

である。

参考文献

Phillps, P.C.B. (1982), “The True Characteristic Function of the F Distribution,” *Biometrika*, 69(1), pp.261–264.