2010年度 エコノメトリックスI & 上級エコノメトリックスI
第14回補足資料

2010年7月24日

§6.4 特性関数を用いたLLN・CLTの理解

A. LLNについて

（設定）$X_1, \cdots, X_n$ は、i.i.d. random sequence であり、$i = 1, \ldots, n$ に対して $\mathrm{E}(X_i) = \mu$ かつ $\mathrm{E} \mid X_i \mid < +\infty$ であるものとする。

いま、$S_n \equiv X_1 + \cdots + X_n$ であるとしよう。このとき、大数の強法則（SLLN）より、

$$\frac{S_n}{n} \longrightarrow \mu \qquad \text{in P}$$

が成立する。これを特性関数を用いて確認してみよう。

X_i $(i = 1, \ldots, n)$ の特性関数は

$$\psi(\theta) = \mathrm{E}(e^{i\theta X_i})$$

であるから、S_n/n の特性関数は、i.i.d. の仮定より

$$\begin{aligned} \psi_{\frac{S_u}{n}}(\theta) &= \mathrm{E}\left(e^{i\theta\frac{1}{n}\sum X_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left(e^{i\frac{\theta}{n}X_i}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \psi\left(\frac{\theta}{n}\right) = \left[\psi\left(\frac{\theta}{n}\right)\right]^n \end{aligned}$$

特性関数 $\psi(\theta)$ をマクローリン展開（0のまわりで Taylor 展開）すると

$$\begin{aligned} \psi(\theta) &= \psi(0) + \frac{\partial\psi(0)}{\partial\theta} \times \theta + o(\theta) \\ &= 1 + i\theta\mathrm{E}(X_i) + o(\theta) \\ &= 1 + i\theta\mu + o(\theta) \end{aligned}$$

が得られる。このとき、$\theta \in R$ に対して、

$$\psi\left(\frac{\theta}{n}\right) = 1 + i\frac{\theta}{n}\mu + o\left(\frac{\theta}{n}\right)$$

が成り立つ。従って、$n \to \infty$ のとき、

$$\psi_{\frac{S_n}{n}}(\theta) = \left(1 + \frac{i\theta\mu}{n} + o\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)^n \longrightarrow e^{i\theta\mu}$$

が得られる。(括弧内の第三項が 0 に収束するので、この項を落として計算していることに注意。)
$e^{i\theta\mu}$ は μ の 1 点分布の特性関数であるから、S_n/n は μ の 1 点分布に分布収束する。

授業で示した定理 6.1.04 より、定数へ分布収束するならば、確率収束するので、

$$\frac{S_n}{n} \to \mu \qquad \text{in P}$$

すなわち大数の弱法則が成立することが示せた。

B. CLT について

ここでは、Lindeberg-Levy CLT の例として、X_j $(j = 1, \ldots, n)$ が独立にパラメータ β の指数分布に従うケースを考えよう。これは昨年の宿題にも出題した例であるので、次ページ以下に昨年の解答例を示す。(今年度の授業の記法に従えば、数式中の t を θ と読み替えて欲しい。)

エコノメトリックスＩ　演習＃12解説*

盛本圭一 †

2009 年 7 月 23 日

1　中心極限定理

$X_j \sim \mathrm{Exp}(\beta)$ である独立な確率変数列 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を考える。ここで、$\mathrm{Exp}(\beta)$ はパラメータ β の指数関数であり、その確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \beta \exp(-\beta x) & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

で与えられるものとする。このとき、次の問に答えなさい。

(1) 特性関数を使って、S_n/n が $1/\beta$ に確率収束することを示しなさい。($S_n = \sum_{j=1}^n X_j/n$)

(2) 特性関数を使って、$Z_n = (S_n - \mathrm{E}(S_n))/\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)})$ が標準正規分布に分布収束することを示しなさい。

解答例

(1)[1]

$Y_n = S_n/n$ とおく。このとき、Y_n の特性関数は

$$\begin{aligned} \varphi_{Y_n}(t) &= E\left[\exp\left(t\frac{\sum_{j=1}^n X_j}{n} \cdot i\right)\right] = \prod_{j=1}^n E\left[\exp\left(\left(\frac{t}{n}\right)X_j \cdot i\right)\right] \\ &= \left(1 - \frac{i}{\beta} \cdot \frac{t}{n}\right)^{-n}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

である。[2]したがって

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(t) = \exp\left(\frac{i}{\beta}t\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

となる。これは Y_n が定数 β^{-1} に分布収束することを意味している。よって、Y_n は β^{-1} に確率収束する。

*これは授業用のメモ程度の簡略な資料です。詳細はセッションで聞いてください。

†質問がある方は gge014mk(at)mail2.econ.osaka-u.ac.jp に連絡してください。

[1] (1) の解答例は数学的には厳密でない。厳密な議論の仕方は (2) の解説で合わせて行う。

[2] ここでは平均 β^{-1} の指数分布の特性関数が $\left(1 - \frac{i}{\beta}t\right)^{-1}$ であることを用いている。

(2)

この問題の解答例は若干数学的に厳密な議論になっているが、それにあまり関心のない人は、概略だけつかめばよい。難しい部分にはカッコをつけてあるので、適当に読み飛ばすこともできる。[3]

Levy の反転定理に注意すると、Z_n の特性関数 φ_{Z_n} が標準正規分布の特性関数に（任意の有界区間上で一様）収束することを示せば十分である。（よって、始めに有界区間 $T = [-\bar{t}, \bar{t}] \subset \mathbb{R}$ を任意に選んでおく。）

まず、証明のための準備をする。

平均 β^{-1} の指数分布の特性関数を ψ とする。さらに各 $t \in T$ に対し

$$\eta(t) = E\Big[\exp\Big(t\big(X_j - \beta^{-1}\big)i\Big)\Big] = \exp\big(-\beta^{-1}it\big)\psi(t),$$

とおく。このとき、関数 η を $t = 0$ の近傍で 2 次 Taylor 展開すると、適当な実数 $\varepsilon \in (0, t)$ に対し

$$\eta(t) = \eta(0) + \eta'(0)t + \frac{\eta''(\varepsilon)}{2}t^2$$

となる。さらに $\eta(0) = 1$, $\eta'(0) = 0$ であるので、結局

$$\eta(t) = 1 + \frac{\eta''(\varepsilon)}{2}t^2 = 1 - \frac{\beta^{-2}}{2}t^2 + \frac{\eta''(\varepsilon) + \beta^{-2}}{2}t^2 \tag{1}$$

とできる。（これで準備は終わり。）

さて、本題に入る。

$$Z_n = \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{V[S_n]}} = \frac{\sum_{j=1}^n X_j - n\beta^{-1}}{\sqrt{n}\beta^{-1}}$$

の特性関数は

$$\begin{aligned}
\varphi_{Z_n}(t) &= E\left[\exp\left(t\frac{\sum_{j=1}^n X_j - n\beta^{-1}}{\sqrt{n}\beta^{-1}} \cdot i\right)\right] = E\left[\prod_{j=1}^n \exp\left(t\frac{X_j - \beta^{-1}}{\sqrt{n}\beta^{-1}} \cdot i\right)\right] \\
&= \prod_{j=1}^n E\left[\exp\left(t\frac{X_j - \beta^{-1}}{\sqrt{n}\beta^{-1}} \cdot i\right)\right] = \left[\eta\left(\frac{t}{\sqrt{n}\beta^{-1}}\right)\right]^n, \quad \forall t \in T.
\end{aligned}$$

したがって、(1) を用いれば

$$\varphi_{Z_n}(t) = \left[1 - \frac{1}{2n}t^2 + \frac{\eta''(\varepsilon) + \beta^{-2}}{2n\beta^{-2}}t^2\right]^n, \forall t \in T, \tag{2}$$

ただし、(2) においては $\varepsilon \in \left(0, \frac{t}{\sqrt{n}\beta^{-1}}\right)$ である。$\lim_{n\to\infty} \varepsilon = 0$ より

$$\lim_{n\to\infty} \eta''(\varepsilon) + \beta^{-2} = \eta''(0) + \beta^{-2} = 0$$

[3] 細かい部分はセッションで（時間に余裕があれば）説明する。

だから、結局（φ_{Z_n} の T 上での Cauchy 性より、T 上一様に）

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right), \quad \forall t \in T. \tag{3}$$

$\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$ は標準正規分布の特性関数だから、(3) は Z_n が標準正規分布に分布収束することを意味する。