

工7/×トリックズ I '10 初7回 授業補足×E (7巻2版)

確率変数 X, Y は

$$X \sim U(0, 1)$$

$$Y|X=x \sim U(0, x) \quad 0 < y < x < 1$$

とあるからと可也。

X の確率密度関数は $f(x)$

Y の条件付き確率密度関数は $g(y|x)$

と可也

$$f(x) = 1$$

$$g(y|x) = \frac{1}{x}$$

よって (X, Y) の同時確率密度関数 $h(x, y)$ は

$$h(x, y) = g(y|x) \cdot f(x) \\ = \frac{1}{x}$$

ただし $0 < y < x < 1$

よって (X, Y) の同時確率密度関数 $h(x, y)$ から 同時分布関数 $H(x, y)$ を導出(24頁)。

x, y の動く領域は

右図の斜線部と可也

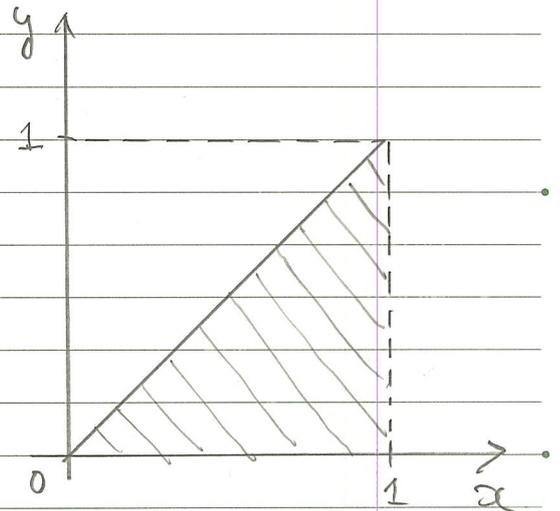
$$H(x, y) = \int_0^y \int_v^x h(u, v) du dv$$

と可也

(u の積分範囲に注意！)

極善と可也 \Rightarrow $\int_0^y \int_v^x \frac{1}{u} du dv$

可也



$$h(u, v) = \frac{1}{u} \text{ と可也}$$

$$H(x, y) = \int_0^y \int_v^x \frac{1}{u} du dv = \int_0^y [\log u]_v^x dv$$

$$= \int_0^y (\log x - \log v) dv \quad \Rightarrow \log x - \int_0^y \log v dv$$

$$\begin{aligned}
 &= [\nu \log x]_0^y - [\nu \log \nu - \nu]_0^y \\
 &= y \log x - 0 - \{(y \log y - y) - (0 - 0)\} \\
 &= y (\log x - \log y + 1) \quad "
 \end{aligned}$$

① 求 ν . $H(x, y)$ の " 分布関数 ϵ と ν の一致を確認しよう。

① $h(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H(x, y)$ とある ϵ の確認

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x} \quad "$$

② $F(x) = H(x, x)$ とある ϵ の確認

$$H(x, x) = x (\log x - \log x + 1) = x$$

ϵ と ν の一致 $\cup (0, 1)$ の分布関数に一致
($y < x$ と ν の一致は注目)

③ $G(y) = H(1, y)$ とある ϵ の確認

$$H(1, y) = y (-\log y + 1)$$

になる。

$$\frac{\partial H(1, y)}{\partial y} = -\log y + 1 - \frac{y}{y} = -\log y$$

ϵ と ν の一致 y の周辺速度関数に一致

③ ν の一致は $H(x, y)$ の表から

④ ν の一致は $Z = X - Y$ の周辺分布関数 α が ν と一致を示す。

density function of $Z=(X-Y)$

