2010年度 エコノメトリックスI&上級エコノメトリックスI
第9回講義補足メモ

2010年6月18日

「Cauchy-Schwartzの不等式」の導出

自然対数関数 log を考える。log(·) は concave function であるから、

$$\left.\begin{array}{l} 0 < a < b \\ 0 \leq \lambda \leq 1 \end{array}\right\} \quad \text{に対して}$$

$$\log(\lambda a + (1-\lambda)b) \geq \lambda \log a + (1-\lambda)\log b$$

が成立する。次に、指数をとると

$$\lambda a + (1-\lambda)b \geq a^{\lambda} b^{(1\lambda)}$$

になる。

次に

$$\left.\begin{array}{ll} a = \frac{(|X|)^p}{(\mathrm{E}|X|^p)}, & b = \frac{(|Y|)^q}{(\mathrm{E}(|Y|^q)} \\ \lambda = \frac{1}{p}, & (1-\lambda) = \frac{1}{q} \end{array}\right\} \quad \text{とおいて上式に代入すると、}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{p}\frac{(\mid X\mid^p)}{(\mathrm{E}\mid X\mid^p)} + \frac{1}{q}\frac{(\mid Y\mid^q)}{\mathrm{E}(\mid Y\mid^q)} &\geq \frac{\mid X\mid}{(\mathrm{E}\mid X\mid^p)^{\frac{1}{p}}}\frac{\mid Y\mid}{(\mathrm{E}\mid Y\mid^q)^{\frac{1}{q}}} \\ &= \frac{\mid XY\mid}{(\mathrm{E}\mid X\mid^p)^{\frac{1}{p}}(\mathrm{E}\mid Y\mid^q)^{\frac{1}{q}}} \end{aligned}$$

になる。

両辺の期待値をとると、

$$1 \geq \frac{\mathrm{E}\mid XY\mid}{(\mathrm{E}\mid X\mid^p)^{\frac{1}{p}}(\mathrm{E}\mid Y\mid^q)^{\frac{1}{q}}} \qquad where \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\ , \quad p, q > 1$$

が得られ、整理すると Cauchy-Schwartz 不等式になる。