

2010年度 エコノメトリックスII&上級エコノメトリックスII  
宿題第1回(2010年10月8日出題)  
解答例

2009年10月22日

Q. 1.9

一般に  $X_1$  と  $X_2$  の同時密度は、

$$f(x_1, x_2) = f(x_1 | x_2)f(x_2)$$

のように、条件付密度と条件になっている変数の無条件密度の積で表される。

もし  $X_1$  と  $X_2$  が統計的に独立しているのであれば、その同時密度関数はそれぞれの周辺密度関数の積に等しくなる。このとき、 $X_2$  を条件とした  $X_1$  の条件付密度は

$$f(x_1 | x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_2)} = \frac{f(x_1)f(x_2)}{f(x_2)} = f(x_1)$$

となって、 $X_1$  の無条件密度に一致する。

このように、条件付密度と無条件密度が等しいのであれば、 $X_1$  の条件付期待値は、

$$\begin{aligned} E(X_1 | X_2) &= \int x_1 f(x_1 | x_2) dx_1 \\ &= \int x_1 f(x_1) dx_1 = E(X_1) \end{aligned}$$

より、無条件の期待値に等しくなる。

Q. 1.20

$\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$  であるから、

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1' \\ \mathbf{X}'_1 \\ \mathbf{X}'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1'1 & 1'\mathbf{X}_1 & 1'\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}'_1 1 & \mathbf{X}'_1 \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}'_1 \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}'_2 1 & \mathbf{X}'_2 \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}'_2 \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}$$

分割した小行列の次元は

$$[k \times k] = \begin{bmatrix} 1 \times 1 & 1 \times k_1 & 1 \times k_2 \\ k_1 \times 1 & k_1 \times k_1 & k_1 \times k_2 \\ k_2 \times 1 & k_2 \times k_1 & k_2 \times k_2 \end{bmatrix}$$

また、 $X'X$  の左上の小行列は、

$$\mathbf{1}'\mathbf{1} = \sum_{i=1}^n 1 \times 1 = n$$

である。