

2010年度エコノメトリックスII&上級エコノメトリックスII
第2回宿題(2010年10月15日出題)
解答例

2010年10月22日

Q. 2.4

ノルムおよび内積は以下のように計算される。

$$\begin{aligned}\|x\| &= (x'x)^{1/2} = \sqrt{5.18} = 2.276 \\ \|y\| &= (y'y)^{1/2} = \sqrt{39.85} = 6.313 \\ \langle x, y \rangle &= x'y = 14.2\end{aligned}$$

内積の定義より $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta$ であるから、

$$\cos \theta = \frac{x'y}{\|x\| \|y\|} = \frac{14.2}{2.276 \times 6.313} = 0.9883$$

よって、

$$\theta = \cos^{-1} 0.9883 = 0.0487\pi = 0.1529 \text{radians}$$

Q. 2.7

$x_1 = 3x_3$ であるから、3つのベクトル x_i ($i = 1, 2, 3$) は一次独立ではない。しかし $x_1 = \alpha x_2$ を満たす α は存在しないので、 x_1 (または x_3) と x_2 は一次独立。よってこの3つのベクトルが張る部分空間は2次元である。

Q. 2.10

まず $P \equiv X(W'X)^{-1}W'$ がべき等行列 (idempotent matrix) であることを示す。

$$PP = X(W'X)^{-1}W'X(W'X)^{-1}W' = X(W'X)^{-1}W' = P$$

しかし、

$$P' = W(X'W)^{-1}X'$$

であるので、 $S(X) \neq S(W)$ という仮定から $X \neq W$ 。よって P は対称行列ではない。

次に P によって射影される空間を考える。いま n 次元の任意のベクトル y があるとき、 P による写像は、 $b \equiv (W'X)^{-1}W'y$ とおくと、

$$Py = X(W'X)^{-1}W'y = Xb$$

で表されるから、 $S(X)$ 上にある。加えて、もし $y \in S(X)$ であれば、 $y = X\beta$ と表すことができるから、

$$Py = X(W'X)^{-1}W'X\beta = y$$

となって P の写像はすべて $S(X)$ 上にある。

さて、 $I - P$ によって射影される空間を考えよう。 n 次元の任意のベクトル u があるとき、 $I - P$ による写像は $(I - P)u$ となるが、

$$W'(I - P)u = (W' - W'X(W'X)^{-1}W')u = (W' - W')u = 0$$

が成立するので、 $S^\perp(W)$ 上にある。また $v \in S^\perp(W)$ となる n 次元の任意のベクトル v があるとき、 $W'v = 0$ が成立するから、 $(I - P)$ による写像は

$$(I - P)v = v - X(W'X)^{-1}W'v = v - 0 = v$$

となって、 $S^\perp(W)$ 上にある。題意より $S(X) \neq S(W)$ であるから、 $S(X)$ と $S^\perp(W)$ は直交しない。