2010年度 エコノメトリックスII&上級エコノメトリックスII
第3回宿題(2010年10月22日出題)
解答例

2009年11月12日

Q. 2.17

FWL定理を用いると、問題の回帰式の両辺に $\boldsymbol{M_1}$ を掛けた式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M_1 y} &= \boldsymbol{M_1 1} + \boldsymbol{M_1 X}_2\beta_2 + \boldsymbol{M_1 u}\\ &= \boldsymbol{M_1 X}_2\beta_2 + \boldsymbol{M_1 u}\end{aligned}$$

における β_2 の最小二乗推定量は、元の回帰式の β_2 の最小二乗推定量と一致する。したがって、

$$\hat{\beta}_2 = (\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M_1 X}_2)^{-1}\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M_1 y}$$

書き直すと、

$$\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M_1 X}_2\hat{\beta}_2 = \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M_1 y} \tag{1}$$

となる。

次に、元の回帰式の回帰残差について考えてみよう。説明変数ベクトルと残差ベクトルは直行するので、以下の式が成立する。

$$\boldsymbol{1}'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{1}\hat{\beta}_1 - \boldsymbol{X}_2\hat{\beta}_2) = 0$$

この式は変形すると、以下のように書き換えることができる。

$$\boldsymbol{1}'\boldsymbol{1}\hat{\beta}_1 + \boldsymbol{1}'\boldsymbol{X}_2\hat{\beta}_2 = \boldsymbol{1}'\boldsymbol{y} \tag{2}$$

$\boldsymbol{1}'\boldsymbol{1} = n$ であるから、(1) 式と (2) 式をつなげて以下の等式を作ることができる。

$$\begin{aligned}n\hat{\beta}_1 + \boldsymbol{1}'\boldsymbol{X}_2\hat{\beta}_2 &= \boldsymbol{1}'\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M_1 X}_2\hat{\beta}_2 &= \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M_1 y}\end{aligned}$$

これは分割行列を使って以下のように表せる。

$$\begin{bmatrix} n & \boldsymbol{1}'\boldsymbol{X}_2 \\ 0 & \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M_1 X}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\beta}_1\\ \hat{\beta}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{1}'\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M_1 y}\end{bmatrix}$$

これにより、設問の形で $\hat{\beta}_1$ と $\hat{\beta}_2$ を記述できることは明らか。

Q. 2.19

$\mathcal{S}(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_2)$ 上の全てのベクトルは $k_2 \times 1$ ベクトル $\boldsymbol{\gamma}$ について $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{\gamma}$ と表すことができる。このようなベクトルに $\boldsymbol{P_X} - \boldsymbol{P}_1$ をかけると、

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{P_X} - \boldsymbol{P}_1)\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_2\gamma &= \boldsymbol{P_X}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_2\gamma = \boldsymbol{P_X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_1)\boldsymbol{X}_2\gamma \\ &= (\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{X}_2)\gamma = \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_2\gamma\end{aligned}$$

になることがわかる。

$\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{I}$ であるので、$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_1) = \boldsymbol{O}$ であることから最初の等式が導き出される。2 番目と 4 番目の等式は $\boldsymbol{M}_1$ の定義から明らか。3 番目の等式は (2.35) 式と $\boldsymbol{P_X}\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{X}_2$ であることを使って得られる。これは $\boldsymbol{X}_2$ の各列は $\boldsymbol{X}$ の列でもあるので $\mathcal{S}(\boldsymbol{X})$ に属しており、$\boldsymbol{P_X}$ の下で不変であることによる。この結果、$\mathcal{S}(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_2)$ の全てのベクトルが $\boldsymbol{P_X} - \boldsymbol{P}_1$ の下で不変であることになる。これで、一つ目の確認ができたことになる。

次に $\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ となるような、$\mathcal{S}(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_2)$ に直交するベクトル $\boldsymbol{z}$ を考えてみよう。$(\boldsymbol{P_X} - \boldsymbol{P}_1)\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ を証明するには、

$$\boldsymbol{P_X}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{z} \tag{1}$$

を証明すれば良い。(1) 式に左から $\boldsymbol{X}'$ をかけると、

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P_X}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{z} \tag{2}$$

となって、(1) 式であれば (2) 式が成立することは明らか。逆に (2) 式に $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ をかけると

$$\boldsymbol{P_X}\boldsymbol{P_X}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{P_X}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{z}$$

となるが、$\boldsymbol{P_X}$ がべき等であり、式 (2.35) より $\boldsymbol{P_X}\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_1$ であることから (1) 式が得られ、(1) 式と (2) 式が同値であることが得られた。

(2) 式を示すには

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1' \\ \boldsymbol{X}_2' \end{pmatrix}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

に注目する。

上のブロック要素は $\boldsymbol{M}_1$ が $\boldsymbol{X}_1$ と annihilate するため、すなわち $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{O}$ であるため $\boldsymbol{0}$ になる。下のブロック要素は、$\boldsymbol{z}$ が $\mathcal{S}(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_2)$ に直交するという仮定のために $\boldsymbol{0}$ になる。したがって

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{z} = \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_1)\boldsymbol{z}$$

となるが、$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P_X} = \boldsymbol{X}$ を代入すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{z} &= \boldsymbol{X}'\boldsymbol{z} \\ &= \boldsymbol{X}'\boldsymbol{P_X}\boldsymbol{z}\end{aligned}$$

のように (2) 式が導かれ、二つ目の確認ができ、以上で証明ができたことになる。

Q. 2.26

FWL 定理より、(2.56) 式の回帰残差と (2.57) 式の回帰残差は計算上同一になる。いま、(2.57) 式における $\boldsymbol{\beta}$ の OLS 推定量を $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$、OLS 残差を $\tilde{\boldsymbol{u}}$ であらわすと、

$$\tilde{\boldsymbol{u}} \equiv \boldsymbol{M}_t\boldsymbol{y} - \boldsymbol{M}_t\boldsymbol{X}\tilde{\boldsymbol{\beta}}$$

(2.56) 式の t 番目の回帰残差は $\tilde{u}_t$ に等しいから

$$\begin{aligned}\tilde{u}_t &= \boldsymbol{e}_t'\tilde{\boldsymbol{u}} \\ &= \boldsymbol{e}_t'\boldsymbol{M}_t\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) = 0\end{aligned}$$

が得られる。

次に $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}$ の $\boldsymbol{\beta}$ の OLS 推定量を $\hat{\boldsymbol{\beta}}$、OLS 残差を $\hat{\boldsymbol{u}}$ で、また (2.56) 式における α の OLS 推定量を $\tilde{\alpha}$ であらわすと、$\tilde{\alpha}\boldsymbol{e}_t + \tilde{\boldsymbol{u}}$ と $\hat{\boldsymbol{u}}$ の差は、(2.59) 式および (2.60) 式より

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}\boldsymbol{e}_t + \tilde{\boldsymbol{u}} - \hat{\boldsymbol{u}} &= \left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) - \left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) \\ &= \boldsymbol{X}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) = \tilde{\alpha}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{e}_t\end{aligned}$$

が得られる。$\tilde{u}_t = 0$ であることに注目すると

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} + \tilde{u}_t - \hat{u}_t = \tilde{\alpha} - \hat{u}_t &= \boldsymbol{e}_t'(\tilde{\alpha}\boldsymbol{e}_t + \tilde{\boldsymbol{u}} - \hat{\boldsymbol{u}}) \\ &= \tilde{\alpha}\boldsymbol{e}_t'\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{e}_t \\ &= \tilde{\alpha}h_t = \frac{h_t}{1-h_t}\hat{u}_t\end{aligned}$$

が得られる。