2010年度 エコノメトリックスII & 上級エコノメトリックスII
第4回宿題(2010年10月29日出題)
解答例

2010年11月19日

Q. 3.5

式 (3.33) と同様に、定数ベクトル $\boldsymbol{w}$ を用いると

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{w}'\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{w}'\mathrm{Var}(\boldsymbol{b})\boldsymbol{w}$$

が成り立つ。ところで分散は非負であるから、上式の右辺は 0 以上となる。しかし、もしこれが全ての $\boldsymbol{w}$ について真ならば、その定義により、$\mathrm{Var}(\boldsymbol{b})$ は非負値定符号行列でなくてはならない。

もし $\mathrm{Var}(\boldsymbol{b})$ が非負値定符号行列でありかつ正値定符号行列ではない場合、$\mathrm{Var}(\boldsymbol{w}_0'\boldsymbol{b}) = 0$ となる $\boldsymbol{w}_0$ が少なくとも 1 つは存在しなければならない。この場合、$\boldsymbol{w}_0'\boldsymbol{b}$ は定数となるから、

$$\mathrm{rank}\,(\mathrm{Var}(\boldsymbol{b})) < k$$

である。

Q. 3.8

$\boldsymbol{A}$ は $k \times k$ の正値定符号行列 (positive definite matrix)。いま $\boldsymbol{R}$ を $\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{A}$ となる $k \times k$ の対称行列とする。また $\boldsymbol{z}$ を $\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ となる非ゼロベクトルとする。このとき、正値定符号行列の定義より

$$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}'\boldsymbol{z} > 0$$

これより、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{z}'\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{z} \\ &= \boldsymbol{z}'\boldsymbol{R}^{-2}\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}'\boldsymbol{z} \\ &= \boldsymbol{z}'(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{z} \end{aligned}$$

したがって、$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ が正値定符号であれば $(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{I})$ も正値定符号。逆も同様に成立。　QED

次に $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ が正値定符号行列であれば、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{z}'\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{z} \\ &= \boldsymbol{z}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1})\boldsymbol{z} > 0\end{aligned}$$

ゆえに、$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}$ も正値定符号行列。このとき前段の性質から $\boldsymbol{R}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{R}-\boldsymbol{I}$ も正値定符号行列。

$$\boldsymbol{z}'(\boldsymbol{R}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{R}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{x} > 0$$

よって $\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}$ は正値定符号。逆も同様に証明。 QED