2010年度 エコノメトリックスII & 上級エコノメトリックスII
第5回宿題(2010年11月12日出題)
解答例

2010年11月26日

Q.3.17

(3.70) 式で表されるどの推定量もガウス=マルコフ定理が扱う推定量のクラス (線形不偏推定量) に属することは明らかであり、この推定量を「ガウス=マルコフ推定量」と呼ぶことにしよう。(3.70) の推定量が $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ で表されることを示すには、$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{W}'$ と置けば良く、条件である $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$ も満たされる。

次に、$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$ を満たす $\boldsymbol{A}$ のもとで、全ての $\boldsymbol{y}$ に対して $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{y}$ となる $\boldsymbol{W}$ を求めると、$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{A}'$ がその答えとなる。($\boldsymbol{A}$ が $k \times n$ であり $\boldsymbol{W}$ が $n \times k$ であることに注意。) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$ であるから、

$$(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$$

となる。従って、ガウス=マルコフ推定量のクラスは (3.70) 式で定義された MM 推定量と同一となる。

Q. 3.20

制約式は $\beta_2 + \beta_3 = 1$ であるから、移項すると $\beta_3 = 1 - \beta_2$ になる。これを線形回帰モデル

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + u_t \qquad (Q.3.20.a)$$

に代入すると、以下の式が得られる。

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + (1 - \beta_2) x_{t3} + u_t \qquad \text{もしくは}$$
$$y_t - x_{t3} = \beta_1 + \beta_2 (x_{t2} - x_{t3}) + u_t$$

二番目の式は、左辺に一つの観察可能変数と右辺には同一のパラメータが掛っている二つの観察可能変数があるものとして表現される。

そこで、$y_t^* = y_t - x_{t3}$ と $z_t = x_{t2} - x_{t3}$ という新しい変数を定義する。制約付の回帰式は明らかに

$$y_t^* = \beta_1 + \beta_2 z_t + u_t \qquad (Q.3.20.b)$$

である。故に (Q.3.20.b) 式の回帰を行うと、制約付の推定が出来ることになる。$\hat{\beta}_2$ の推定値は直接得られるし、β_3 の推定値は制約が付いているので $\hat{\beta}_3 = 1 - \hat{\beta}_2$ として得られる。

さて、(Q.3.20.a) 式と同等の無制約のモデルを作るために、(Q.3.20.b) 式の右辺に三つ目の項を加える。これにより以下の式が得られる。

$$y_t^* = \beta_1 + \beta_2 z_t + (\beta_2 + \beta_3 - 1)x_{t3} + u_t$$

よって、もし

$$y \,\hat{}\, *_t = \beta_1 + \beta_2 z_t + \gamma x_{t3} + u_t \tag{$Q.3.20.c$}$$

の回帰を行うならば、直接 β_1 と β_2 の推定値を得ることができるし、また $\hat{\gamma} - \hat{\beta}_2 + 1$ という関係を使って β_3 の推定値も得られる。もし制約通りにデータが生成されているならば（滅多に起こらないことだが）γ の推定値は 0 になる。

同様にして、制約付のモデルから、β_3 の代わりに β_2 を除くことができる。この場合に (Q.3.20.b) 式はパラメータ β_1 および β_3 と（Q.3.20.b) 式とは異なる変数で表現できる回帰モデルに置き換えることができる。すなわち、

$$y_t^+ = \beta_1 + \delta x_{t2} + \beta_3 w_t + u_t$$

になる。ここで、$y_t^+ = y_t - x_{t2}$、$w_t = x_{t3} - x_{t2} = -z_t$ である。さらに、もし制約通りにデータが生成されているならば、$\hat{\delta} = 0$ になる。