# 2010年度 エコノメトリックスII&上級エコノメトリックスII
# 第6回宿題(2010年11月19日出題)
# 解答例

2010年12月2日

## Q.4.9

(4.25) 式の $t$ 統計量は

$$\left(\frac{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{y}}{n-k}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\boldsymbol{x}_2{}'\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y}}{(\boldsymbol{x}_2{}'\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{x}_2)^{\frac{1}{2}}}=(n-k)^{\frac{1}{2}}\frac{\boldsymbol{x}_2{}'\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{x}_2\|\,\|\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{y}\|} \qquad (Q4.9.1)$$

と表すことができる。

(Q4.9.1) 式の右辺の第2項が $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{x}_2$ のなす角度 $\phi$ の余接 (cotangent) 関数と等しいことを示したい。余接関数の定義により

$$\cot\phi=\frac{\cos\phi}{(1-\cos^2\phi)^{\frac{1}{2}}} \qquad (Q4.9.2)$$

であり、余弦関数の定義（2.2章を参照）により $\phi$ の余弦関数は

$$\cos\phi=\frac{\boldsymbol{x}_2{}'\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y}\|\,\|\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{x}_2\|} \qquad (Q4.9.3)$$

であるので、

$$\cos^2\phi=\frac{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_2{}'\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y}\|^2\|\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{x}_2\|^2}$$

である。$\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{x}_2$ は列ベクトルであるので、

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{x}_2}=(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{x}_2)\left((\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{x}_2)'(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{x}_2)\right)^{-1}(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{x}_2)'=\frac{\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_2{}'\boldsymbol{M}_1}{\|\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{x}_2\|^2}$$

と表すことができ、これにより

$$\cos^2\phi=\frac{\|\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{x}_2}\boldsymbol{y}\|^2}{\|\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y}\|^2}$$

を得る。(4.36) 式の結果により

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{x}_2}$$

であり、それゆえ

$$\cos^2\phi = \frac{\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{P_X} - \boldsymbol{P}_1)\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y}} = \frac{\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{M_X})\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y}} = 1 - \frac{\| \boldsymbol{M_X y} \|^2}{\| \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y} \|^2} \tag{Q4.9.4}$$

となる。

最終的に、(Q4.9.2)、(Q4.9.3)、(Q4.9.4) の各式により

$$\cot\phi = \frac{\boldsymbol{x}_2{}'\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y}}{\| \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y} \| \| \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{x}_2 \|}\frac{\| \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y} \|}{\| \boldsymbol{M_X y} \|} = \frac{\boldsymbol{x}_2{}'\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y}}{\| \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{x}_2 \| \| \boldsymbol{M_X y} \|}$$

となり、これが (Q4.9.1) 式の第 2 項であることが示される。

次に、(4.75) 式の回帰式を考えてみよう。一番目の回帰式における $\beta_2 = 0$ の $t$ 検定統計量は、前の問題より $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{x}_2$ のなす角の余接関数の $(n-k)^{\frac{1}{2}}$ 倍であることがわかっている。全く同じ理由で、二番目の回帰式における $\gamma_2 = 0$ の $t$ 検定統計量は $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{x}_2$ と $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y}$ のなす角の余接関数の $(n-k)^{\frac{1}{2}}$ 倍でなければならない。しかし、2 つのベクトルのなす角はベクトルを指定する順番には依存しないので、これらの余接関数は同一である。よって、(4.75) 式の回帰式における $\beta_2 = 0$ と $\gamma_2 = 0$ の $t$ 検定統計量は数値上同一であると結論づけられる。

## Q. 4.14

テキスト 120 ページの Section4.4 で見たように、回帰モデルが正しく定式化されていれば、

$$\frac{1}{\sigma_0^2}\boldsymbol{y}'\boldsymbol{M_X y} = \boldsymbol{\epsilon}'\boldsymbol{M_X}\boldsymbol{\epsilon} \tag{Q4.14.1}$$

は自由度 $n-k$ の $\chi^2$ 分布に従うことがわかっている。（ここで $\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$ ）

したがって、(Q4.14.1) 式の左辺を検定統計量として用いることで、$\sigma = \sigma_0$ という帰無仮説を検定することができる。対立仮説は $\sigma \neq \sigma_0$ であるので、両側検定を行わなくてはならない。よって、上側および下側の両方の臨界値が必要となる。