2010年度 エコノメトリックスII&上級エコノメトリックスII 第7回宿題(2010年12月3日出題) 解答例

2011年1月7日

Q. 6.2

y_t から標本平均 $\bar{y}$ を引くことや、$1/t$ からその標本平均 $s(n)/n$ を引くことは、それぞれ定数項に回帰して残差をとることに等しい。よってFWL理論によりOLS推定量 $\hat{\beta}_2$ は $y_t - \bar{y}$ を $1/t - s(n)/n$ に回帰したときの推定量と同一である。この推定量は以下の式で表される。

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})(1/t - s(n)/n)}{\sum_{t=1}^{n}(1/t - s(n)/n)^2} \qquad (Q6.2-1)$$

DGP は (3.20) 式であり、$\beta_2 = \beta_2^0$ と仮定されているので、

$$y_t - \bar{y} = \beta_2^0(1/t - s(n)/n) + u_t - \bar{u} \qquad (Q6.2-2)$$

となる。ここで $\bar{u}$ は u_t の平均を示す。(Q6.2-1) 式を (Q6.2-2) 式に代入すると以下の様に書き換えられる。

$$\hat{\beta}_2 - \beta_2^0 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(u_t - \bar{u})(1/t - s(n)/n)}{\sum_{t=1}^{n}(1/t - s(n)/n)^2} \qquad (Q6.2-3)$$

(Q6.2-3) 式より $\beta_2 - \beta_2^0$ の平均値が 0 であること得られる。なぜなら、$1/t - s(n)/n$ は非確率変数なので、右辺の分子の期待値は、$u_t - \bar{u}$ の期待値と同じく 0 である。分母もまた非確率変数なので、u_t に関する仮定より、$\beta_2 - \beta_2^0$ は平均 0 の正規分布となる。

次に (Q6.2-3) 式の右辺の漸近分散を求めることにしよう。平均は 0 であるから、

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2 - \beta_2^0) = \mathrm{E}\left(\frac{\sum_{t=1}^{n}(u_t - \bar{u})(1/t - s(n)/n)}{\sum_{t=1}^{n}(1/t - s(n)/n)^2}\right)^2 \qquad (Q6.2-4)$$

(Q6.2-4) 式の右辺の分子は n 項の和の二乗である。$t \neq s$ のときには $\mathrm{E}(u_t u_s) = 0$ なので、$\mathrm{plim}(\bar{u}) = 0$ である。さらに、$\lim s(n)/n = 0$ である。よって、この分子の期待値は漸近的に

$$\mathrm{E}\left(\sum_{t=1}^{n} {u_t}^2 (1/t)^2\right) = \frac{1}{6}\pi^2\sigma^2 \qquad (Q6.2-5)$$

と等しい。また、$\lim s(n)/n = 0$ かつ $\lim s^2(n)/n = 0$ より、(Q6.2-3) 式の右辺の分母は漸近的に

$$\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{t=1}^{n}(1/t)^2\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\pi^2\right)^2 \tag{Q6.2-6}$$

と等しい。ゆえに (Q6.2-5) の右辺を (Q6.2-6) 式の右辺で割ると、以下のように漸近分散が得られる。

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2 - \beta_2^0) \overset{a}{=} \frac{6\sigma^2}{\pi^2}$$

Q. 6.5

(6.27) 式のモーメント条件の左辺を n^{-1} 倍すると

$$n^{-1}\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{\beta})\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\beta}))$$

となる。

$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\beta}_0) = \boldsymbol{u}$ なので、$\boldsymbol{\beta}_0$ に関する 1 次の Taylor 展開により以下の式が得られる。

$$n^{-1}\boldsymbol{X}_0'\boldsymbol{u} - n^{-1}\boldsymbol{X}_0'\boldsymbol{X}_0(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0) + n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\boldsymbol{A}_t(\boldsymbol{\beta}_0)(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)u_t \tag{Q6.5-1}$$

(Q6.5-1) 式において、教科書と同様に $\boldsymbol{X}_0 \equiv \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\beta}_0)$ であり、また $\boldsymbol{A}_t(\boldsymbol{\beta})$ は

$$\boldsymbol{A}_t(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\partial^2 x_t(\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'}$$

となる $k \times k$ の行列である。

(Q6.5-1) 式の第 3 項は (6.20) 式と対応するところが無い。$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\beta})'$ を $\boldsymbol{\beta}$ に関して偏微分する際に得られる項であるためである。もし大数の法則がこの第 3 項の各要素に対して当てはめられるなら、この項は $n \to \infty$ に従って $\boldsymbol{0}$ に収束しなければならない。$x_t(\boldsymbol{\beta}_0)$ とその導関数は Ω_t に属するので、u_t とは独立でなければならない。よって $\mathrm{E}(u_t) = 0$ により、$\boldsymbol{A}_t(\boldsymbol{\beta}_0)(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)u_t$ の各要素は $\boldsymbol{0}$ の期待値を持たねばならない。従って、(1) 式の第 3 項に大数の法則を当てはめることのできる適当な正則条件を $\boldsymbol{A}_t$ が満たすのであれば、この項は $n \to \infty$ に従って $\boldsymbol{0}$ に収束する。

Q. 6.10

設問のモデルをまとめると、

$$y_t = \boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta} + \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$$

となるが、u_{t-1} を $y_{t-1} - \boldsymbol{X}_{t-1}\boldsymbol{\beta}$ に、u_{t-2} を $y_{t-2} - \boldsymbol{X}_{t-2}\boldsymbol{\beta}$ に置き換える。最初の 2 つの観測値を所与とすれば、元のモデルは次の非線形回帰モデルに書き換えることができる。

$$y_t = \boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta} + \rho_1(\boldsymbol{y}_{t-1} - \boldsymbol{X}_{t-1}\boldsymbol{\beta}) + \rho_2(\boldsymbol{y}_{t-2} - \boldsymbol{X}_{t-2}\boldsymbol{\beta}) + \varepsilon_t \tag{Q6.10-1}$$

次に、OLS 推定量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ を得るために、y_t を $\boldsymbol{X}_t$ 上に回帰させる必要がある。また GNR の独立変数を得るために、以下のように (Q6.10-1) 式の回帰式をパラメータについて微分しなければならない。

$$\begin{aligned}
\partial x_t(\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\beta} &= \boldsymbol{X}_t - \rho_1\boldsymbol{X}_{t-1} - \rho_2\boldsymbol{X}_{t-2} \\
\partial x_t(\boldsymbol{\beta})/\partial\rho_1 &= y_{t-1} - \boldsymbol{X}_{t-1}\boldsymbol{\beta} \\
\partial x_t(\boldsymbol{\beta})/\partial\rho_2 &= y_{t-2} - \boldsymbol{X}_{t-2}\boldsymbol{\beta}
\end{aligned}$$

GNR の従属変数と独立変数は（帰無仮説の）制約付推定量 $(\hat{\boldsymbol{\beta}}, 0, 0)$ で評価される。この GNR の被説明変数（従属変数）は $\hat{u}_t = y_t - \boldsymbol{X}_t\hat{\boldsymbol{\beta}}$ になる。また $\boldsymbol{\beta}$ に対応する独立変数のベクトルは $\boldsymbol{X}_t$ であり、ρ_i $(i = 1, 2)$ に対応する独立変数は $\hat{u}_{t-i}$ である。よってテストの回帰は以下の通り。

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{X}_t\boldsymbol{b} + r_1\hat{u}_{t-1} + r_2\hat{u}_{t-2} + \text{residual}. \qquad (Q6.10-2)$$

この回帰式における $r_1 = r_2 = 0$ の検定ための F 統計量は、元のテスト統計量と等しくなる。これは (Q6.10-2) 式の回帰式の制約なしモデルの SSR と y_t を $\boldsymbol{X}_t$ のみに回帰した制約付モデルの SSR を使って計算できる。これらの 2 つの回帰モデルの推定は同じサンプル期間で行われなければならない。よって、最初の 2 つの観測値を除くか、観測できないラグ付残差を 0 で置き換えるか、のどちらかの対応をする必要がある。