2010年度 エコノメトリックスII&上級エコノメトリックスII
第8回宿題(2010年12月17日出題)
解答例

2011年1月11日

Q. 6.8

DGP(Data Generating Process) より

$$\hat{u}_t \equiv y_t - x_t(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = x_t(\boldsymbol{\beta}) + u_t - x_t(\hat{\boldsymbol{\beta}})$$

と書ける。次に $x_t(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ を真値 $\boldsymbol{\beta}_0$ の周りで 2 次の項まで Taylor 展開すると、

$$x_t(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = x_t(\boldsymbol{\beta}_0) + \boldsymbol{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0)(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0) + \frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0)'\bar{\boldsymbol{H}}_t(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0)$$

となるから、これを最初の式に代入すると (6.10) を得る。

(6.10) を $\boldsymbol{b}$ を使って書き直すと、

$$\hat{u}_t = u_t - n^{-1/2}\boldsymbol{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0)\boldsymbol{b} - \frac{1}{2}n^{-1}\boldsymbol{b}'\bar{\boldsymbol{H}}_t\boldsymbol{b}$$

となる。これより $\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2 = \hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}$ は

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}} \quad = \quad & \boldsymbol{u}'\boldsymbol{u} + n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\boldsymbol{b}'\boldsymbol{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0)'\boldsymbol{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0)\boldsymbol{b} + \frac{1}{4n^2}\sum_{t=1}^{n}\left(\boldsymbol{b}'\bar{\boldsymbol{H}}_t\boldsymbol{b}\right)^2 \\
& -2n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}u_t\boldsymbol{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0)\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}'\left(n^{-1}\sum_{t=1}^{n}u_t\bar{\boldsymbol{H}}_t\right)\boldsymbol{b} \\
& +n^{-3/2}\sum_{t=1}^{n}\boldsymbol{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0)\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}'\bar{\boldsymbol{H}}_t\boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

と表すことが出来る。求めたいのは、$n \to \infty$ のときに右辺がどのようになるかである。まず右辺 2 項目は

$$\sum_{t=1}^{n}\boldsymbol{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0)'\boldsymbol{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0) = \boldsymbol{X}_0'\boldsymbol{X}_0$$

であり、

$$\boldsymbol{b} \simeq \left(n^{-1}\boldsymbol{X}_0'\boldsymbol{X}_0\right)^{-1} n^{-1/2}\boldsymbol{X}_0'\boldsymbol{u}$$

であることを用いると、

$$\boldsymbol{u}'\boldsymbol{X}_0(\boldsymbol{X}_0'\boldsymbol{X}_0)^{-1}\boldsymbol{X}_0'\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}_0}\boldsymbol{u}$$

となる。次に 3 項目は $O(1/n)$ であるので 0 に収束する。4 項目は

$$\begin{aligned} -2n^{-1/2}\boldsymbol{u}'\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{\beta} &\simeq -2n^{-1/2}\boldsymbol{u}'\boldsymbol{X}_0(n^{-1}\boldsymbol{X}_0'\boldsymbol{X}_0)^{-1}n^{-1/2}\boldsymbol{X}_0'\boldsymbol{u} \\ &= -2\boldsymbol{u}'\boldsymbol{X}_0(\boldsymbol{X}_0'\boldsymbol{X}_0)^{-1}\boldsymbol{X}_0'\boldsymbol{u} \\ &= -2\boldsymbol{u}'\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}_0}\boldsymbol{u} \end{aligned}$$

となる。5 項目は

$$n^{-1}\sum_{t=1}^{n} u_t\bar{\boldsymbol{H}}_t \to \mathrm{E}(u_t\bar{\boldsymbol{H}}_t) = \boldsymbol{O}$$

となるため、また 6 項目は $O(1/\sqrt{n})$ であるため、それぞれ 0 に収束する。

　これらの結果を代入すると、

$$\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}'\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}_0}\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{u}'\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}_0}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}_0}\boldsymbol{u}$$

よって、

$$|\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}_0}\boldsymbol{u}| \to 0 \qquad \text{as } n \to \infty$$

が示せる。

Q. 6.9

　(6.40) の結果から $\hat{\boldsymbol{u}} \overset{a}{=} \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}_0}\boldsymbol{u}$ であることがわかる。6.7 節 (p.243) ではこの関係を使って、(6.68) 式及び (6.69) 式の非線形回帰の残差 2 乗和を使って計算された F 統計量の分子を r 倍すると、漸近的に

$$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{M}_0 - \boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_0)\boldsymbol{u} \qquad (Q6.9-1)$$

と等しくなることを示した。もちろん分母は漸近的に σ_0^2 と等しくなる。

　いま (6.80) 式及び (6.81) 式の二つの GNR の残差 2 乗和 (SSR) を使って計算された F 統計量を考えることにしよう。(6.80) 式の SSR は、$\boldsymbol{M}_{\acute{\boldsymbol{X}}_1} \equiv \boldsymbol{I} - \acute{\boldsymbol{X}}_1(\acute{\boldsymbol{X}}_1{}'\acute{\boldsymbol{X}}_1)^{-1}\acute{\boldsymbol{X}}_1{}'$ とおくと、

$$(\boldsymbol{y} - \acute{\boldsymbol{x}})'\boldsymbol{M}_{\acute{\boldsymbol{X}}_1}(\boldsymbol{y} - \acute{\boldsymbol{x}})$$

となる。また (6.81) 式の SSR は、$\boldsymbol{M}_{\acute{\boldsymbol{X}}} \equiv \boldsymbol{I} - \acute{\boldsymbol{X}}(\acute{\boldsymbol{X}}'\acute{\boldsymbol{X}})^{-1}\acute{\boldsymbol{X}}'$ とおくと、

$$(\boldsymbol{y} - \acute{\boldsymbol{x}})'\boldsymbol{M}_{\acute{\boldsymbol{X}}}(\boldsymbol{y} - \acute{\boldsymbol{x}})$$

となる。よって F 統計量の分子を r 倍すると、この 2 つの SSR の差、つまり

$$(\boldsymbol{y} - \acute{\boldsymbol{x}})'\boldsymbol{M}_{\acute{\boldsymbol{X}}_1}(\boldsymbol{y} - \acute{\boldsymbol{x}}) - (\boldsymbol{y} - \acute{\boldsymbol{x}})'\boldsymbol{M}_{\acute{\boldsymbol{X}}}(\boldsymbol{y} - \acute{\boldsymbol{x}}) \qquad (Q6.9-2)$$

になる。

$\acute{\boldsymbol{\beta}}$ の一致性は、$n \to \infty$ のときに $\boldsymbol{M}_{\acute{\boldsymbol{X}}_1} \to \boldsymbol{M}_0$ 及び $\boldsymbol{M}_{\acute{\boldsymbol{X}}} \to \boldsymbol{M}_1$ となることを意味する。(6.40) 式を導くのと同様にして、

$$\boldsymbol{y} - \acute{\boldsymbol{x}} \stackrel{a}{=} \boldsymbol{M}_0 \boldsymbol{u}$$

がいえる。

よって (Q6.9-2) 式は漸近的に

$$\boldsymbol{u}'\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}'\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{M}_0 - \boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{u} \qquad (Q6.9-3)$$

と等しくなる。これには (2.35) 式の結果である $\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{M}_1$ を利用している。Q2.15 を参照のこと。

(Q6.9-3) 式の右辺は (Q6.9-1) 式の左辺と等しいので、二つの F 統計量の分子は漸近的に等しくなることがわかる。GNR にもとづく F 統計量の分母はちょうど (6.69) 式の SSR を $n - k$ で割ったものになっている。帰無仮説の下ではこれは明らかに σ_0^2 に収束する。よって二つの F 統計量は漸近的に同じ確率変数に収束する。