2010年度 エコノメトリックスII&上級エコノメトリックスII
第9回宿題(2011年1月7日出題)
解答例

2011年1月27日

Q. 7.5

u_t が AR(1) 過程 $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$ に従うという対立仮説の下で、非線形モデル $y_t = x_t(\boldsymbol{\beta}) + u_t$ は

$$y_t = z_t(\boldsymbol{\gamma}) + \epsilon_t \qquad (t = 2, \ldots, n)$$

と表すことができる。ここで

$$\begin{aligned} \gamma &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}' & \rho \end{pmatrix}' \\ z_t(\boldsymbol{\gamma}) &= x_t(\boldsymbol{\beta}) + \rho y_{t-1} - \rho x_{t-1}(\boldsymbol{\beta}) \end{aligned}$$

である。このとき GNR は

$$\begin{aligned} y_t - z_t(\boldsymbol{\gamma}) &= \breve{\boldsymbol{z}}_t(\boldsymbol{\gamma})'\boldsymbol{c} + \text{error} \\ \text{where} \qquad & \breve{\boldsymbol{z}}_t(\boldsymbol{\gamma}) = \begin{pmatrix} \breve{\boldsymbol{x}}_t(\boldsymbol{\beta})' - \rho \breve{\boldsymbol{x}}_{t-1}(\boldsymbol{\beta})' & y_{t-1} - x_{t-1}(\boldsymbol{\beta}) \end{pmatrix}' \\ & \breve{\boldsymbol{x}}_t(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\partial x_t}{\partial \boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}) \\ & \boldsymbol{c} = (\ \boldsymbol{b}' \quad b_\rho \ )' \end{aligned}$$

この GNR を帰無仮説 ($\rho = 0$ かつ $\boldsymbol{\beta} = \tilde{\boldsymbol{\beta}}$) で評価すると、

$$y_t - x_t(\tilde{\boldsymbol{\beta}}) = \breve{\boldsymbol{x}}_t(\tilde{\boldsymbol{\beta}})'\boldsymbol{b} + (y_{t-1} - x_{t-1}(\tilde{\boldsymbol{\beta}}))b_\rho + \text{error}$$

となる。$\tilde{u}_t = y_t - x_t(\tilde{\boldsymbol{\beta}})$ とし、

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{u}} &= \begin{pmatrix} u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix}' \\ \tilde{\boldsymbol{u}}_1 &= \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_{n-1} \end{pmatrix}' \end{aligned}$$

とすると、先の式の行列表現は、

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{u}} &= \breve{\boldsymbol{X}}(\tilde{\boldsymbol{\beta}})\boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{u}}_1 b_\rho + \text{error} \\ &\quad \text{where } \breve{\boldsymbol{X}}(\tilde{\boldsymbol{\beta}}) = \begin{pmatrix} \breve{\boldsymbol{x}}_2(\tilde{\boldsymbol{\beta}})' \\ \vdots \\ \breve{\boldsymbol{x}}_n(\tilde{\boldsymbol{\beta}})' \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。

Q. 7.7

H_1 のモデルは書き直すと、

$$y_t - \beta = \rho(y_{y-1} - \beta) + u_t$$

となるから、$v_t \equiv y_t - \beta$ と定義すると、$u_t \sim \text{IID}(0, \sigma^2)$ であることから撹乱項 v_t が AR(1) 過程に従うモデルであることがわかる。また、H_0 のモデルは、説明変数が 1 のみの回帰モデル

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{1}\beta + \boldsymbol{u}$$

として考えることができる。

ところで、H_1 のモデル GNR は、$\boldsymbol{\gamma} = (\beta,\ \rho)'$ とおくと

$$z_t(\boldsymbol{\gamma}) = \beta + \rho(y_{t-1} - \beta)$$

と表されるので、

$$\boldsymbol{Z}_t(\boldsymbol{\gamma}) \equiv \frac{\partial z_t(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_t(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \beta} \\ \frac{\partial z_t(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \rho \\ y_{t-1} \end{pmatrix}$$

として、

$$u_t = y_t - z_t(\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{Z}_t(\boldsymbol{\gamma})'\boldsymbol{b} + \text{residual}$$

で表すことができる。これを H_0 の下、すなわち

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \left(\hat{\beta},\ 0\right)'$$

で評価する ($\hat{\beta}$ は H_0 の OLSE であり、y_t の標本平均に一致する）と、

$$\tilde{u}_t = b_1 + b_\rho \tilde{u}_{t-1} + \text{residual} \qquad (Q7.7-1)$$

(ここで、$\tilde{u}_t \equiv y_t - \hat{\beta}$) となるので、$b_\rho = 0$ の t 検定統計量を用いて検定すればよい。

次に H_2 のモデルについて考えることにしよう。このモデルの GNR はスカラー表現で

$$y_t - \beta - \alpha u_{t-1} = b_1 + b_\alpha u_{t-1} + \text{residual} \qquad (Q7.7-2)$$

となる。この式の u_{t-1} は観測されないが、帰無仮説 H_0 の下では、(Q7.7-2) 式の左辺は $y_t - \beta$ に等しくなる。そこで、β を $\hat{\beta}$ で置き換え、$\alpha = 0$ とすれば、帰無仮説 H_0、対立仮説 H_2 とする検定のための GNR は

$$\tilde{u}_t = b_1 + b_\alpha \tilde{u}_{t-1} + \text{residual}$$

となって、(Q7.7-1) 式と一致する。

Note: GNR を使った検定については、テキスト p.244–249 を参照のこと。