2010年度 エコノメトリックスII&上級エコノメトリックスII
第10回宿題 (2011年1月21日出題)
解答例

2011年1月28日

Q. 7.23

データがまず集団（個体）ごとに並んでおり、それぞれの集団（個体）の中で時間順に並んでいれば、$mT \times k$ 行列 $\boldsymbol{X}$ を

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}_m \end{pmatrix}$$

の様に分割できる。なお、$\boldsymbol{X}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ はそれぞれ $T \times k$ の行列である。同様に、ベクトル $\boldsymbol{y}$ 及び $\boldsymbol{\varepsilon}$ も

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_m \end{pmatrix} \qquad \text{と} \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_m \end{pmatrix}$$

のように分割することができる。

また、$\mathbf{1}$ を全ての要素が 1 から成る $T \times 1$ ベクトルとして定義し、$\boldsymbol{M}_{\mathbf{1}} \equiv \boldsymbol{I}_T - \mathbf{1}(\mathbf{1}'\mathbf{1})^{-1}\mathbf{1}'$ とおく。すると十分な正則条件は

$$\operatorname*{plim}_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{X}_i' \boldsymbol{M}_{\mathbf{1}} \boldsymbol{X}_i \qquad (Q7.23-1)$$

が正値定符号行列で、かつ

$$\operatorname*{plim}_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{X}_i' \boldsymbol{M}_{\mathbf{1}} \boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{0} \qquad (Q.7.23-2)$$

となることである。

ここで固定効果推定量 (7.86) を考えてみよう。行列 $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{D}}$ は単純に集団の平均値からの偏差をとる行列であるので

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{X}_i' \boldsymbol{M}_{\mathbf{1}} \boldsymbol{X}_i$$

かつ

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{M}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{\varepsilon}_i$$

となる。

よって、もし DGP が (7.85) で $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_0$ であれば

$$\begin{aligned}
\operatorname*{plim}_{m\to\infty} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{FE} &= \Big(\operatorname*{plim}_{m\to\infty} \frac{1}{m}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{X}\Big)^{-1}\Big(\operatorname*{plim}_{m\to\infty} \frac{1}{m}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}_0 + \boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{\varepsilon})\Big) \\
&= \boldsymbol{\beta}_0 + \Big(\operatorname*{plim}_{m\to\infty} \frac{1}{m}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{X}\Big)^{-1} \operatorname*{plim}_{m\to\infty} \frac{1}{m}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{\varepsilon} \\
&= \boldsymbol{\beta}_0 + \Big(\operatorname*{plim}_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{M}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{X}_i\Big)^{-1}\Big(\operatorname*{plim}_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{M}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{\varepsilon}_i\Big)
\end{aligned}$$

と書ける。

このとき、(Q7.23-1) 式と (Q7.23-2) 式が共に満たされれば上式の最終行の第 2 項は $\mathbf{0}$ になる。なぜなら、正値定符号行列の逆行列とゼロベクトルの積の形になるからである。よって $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{FE}$ は一致推定量であることが分かる。なお、(Q7.23-1) 式がなければ逆行列は存在しないので、第 2 項を $\mathbf{0}$ とすることはできない点に注意。