2010年度 エコノメトリックスII
& 上級エコノメトリックスII
第1回講義メモ

2010年10月1日

はじめに

目的 エコノメトリックスにおける推定、検定などの基本的な考え方を理解すること。エコノメトリックスIと同様、理論に重きを置く。

教科書 Davidson, R. & Mackinnon, J.G. (2004), *Econometric Theory and Methods*, Oxford University Press

参考書 シラバス参照のこと。教科書が難しいと感じる受講者は　浅野・中村 (2009),『計量経済学 第2版』, 有斐閣　を一読しておくことを勧める。

授業の進め方 エコノメトリックスIとは異なり、スライド＋ハンドアウトで行う予定。

今週は、エコノメトリックスIの積み残しの「マルコフ連鎖」を扱い、来週から本題に入る。

§7. マルコフ連鎖 Markov Chain

§7.1 マルコフ連鎖の基本

有限の状態 $S = \{S_0, \cdots, S_n\}$ を考える。(状態空間が finite)
初期時点 $t = 0$ において、state の確率が、以下のように与えられているものとする。

$$\tilde{\boldsymbol{p}}_0 = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(S(0) = S_0) \\ \mathrm{P}(S(0) = S_1) \\ \vdots \\ \mathrm{P}(S(0) = S_n) \end{pmatrix}$$

では、時点 $r > 0$ において、$\mathrm{P}(S(r) = s)$ を考えよう。
i.i.d.seq. では

$$\tilde{\boldsymbol{p}}_0 = \tilde{\boldsymbol{p}}_1 = \cdots = \tilde{\boldsymbol{p}}_r = \cdots$$

であるから簡単。しかし、dependent seq. では、$r-1$ 以前の state によって確率が変化する。すなわち、r 時点から 0 時点までの状態の同時確率は、

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(S(r), S(r-1), \cdots, S(0))\\&\quad= \mathrm{P}(S(r) \mid S(r-1), S(r-2), \cdots, S(0))\\&\qquad\times \mathrm{P}(S(r-1) \mid S(r-2) \cdots, S(0)) \times \cdots \times \mathrm{P}(S(0))\end{aligned}$$

のように、条件付確率を使って表現できることに注意。

中でも 1 時点前である $r-1$ 時点の state にのみ依存するシステムを考える。これを単純マルコフ連鎖という。

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(S(r), S(r-1), \cdots, S(0)) &= \mathrm{P}(S(r) \mid S(r-1))\\&\quad\times \mathrm{P}(S(r-1) \mid S(r-2)) \times \cdots\\&\quad\times \mathrm{P}(S(1) \mid S(0)) \times \mathrm{P}(S(0))\end{aligned}$$

$r-1$ 時点の state S_i から r 時点の state S_j に移る確率を推移確率といい、p_{ij} で表す。

勿論 $p_{ij} \geq 0$ かつ $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} p_{ij} = 1$ 。

これを $(n+1) \times (n+1)$ の行列で表したものが推移確率行列

$$\tilde{\boldsymbol{P}} = \begin{pmatrix} p_{00} & \cdots & p_{n0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{0n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

である。これより、$\tilde{\boldsymbol{p}}_r = \tilde{\boldsymbol{P}}\tilde{\boldsymbol{p}}_{r-1}$ であることが得られる。

注意 テキストでは $\boldsymbol{P} = \tilde{\boldsymbol{P}}'$ 、$\boldsymbol{p} = \tilde{\boldsymbol{p}}'$ として定義しているので、$\boldsymbol{p}_r = \boldsymbol{p}_{r-1}\boldsymbol{P}$ になっている。

いま、k ステップ先の推移確率行列 (k 次推移確率行列という) を

$$\tilde{\boldsymbol{P}}^{(k)} = \begin{pmatrix} p_{00}^{(k)} & \cdots & p_{n0}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{0n}^{(k)} & \cdots & p_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

とする。ここで、$p_{ij}^{(k)} = \mathrm{P}(S(r+k) = S_j \mid S(r) = S_i)$ である。このとき、$r+k$ 時点の state の確率は、$\tilde{\boldsymbol{p}}_{r+k} = \tilde{\boldsymbol{P}}^{(k)}\tilde{\boldsymbol{p}}_r$ で表されるが、単純マルコフ連鎖の場合は $\tilde{\boldsymbol{P}}^{(k)} = \tilde{\boldsymbol{P}}^k$ になっていることに注意。

§7.2 マルコフ連鎖の性質

定義 7.2.1 エルゴード性

$$^{\exists}n_0 \in \boldsymbol{N}\,,\quad p_{ij}^{(n_0)} > 0 \quad \forall_{i,j}$$

であるとき、$\boldsymbol{P}$ はエルゴード的であるという。(i.e. どのような状態 i から出発しても任意の状態 j に正の確率で到着可能である。)

定義 7.2.2

(1) 任意の $S_i, S_j \in S$ に対して $n_1 \in \boldsymbol{N}$ が存在し、$p_{ij}^{(n_1)} > 0$ になるとき、P は既約（irreducible）であるという。

(2) 状態 $S_i \in S$ に対して $n_2 \in \boldsymbol{N}$ が存在し、$n \geq n_2$ について $p_{ii}^{(n)} > 0$ になるとき、状態 S_i は非同期的（aperiodic）であるという。

補題 7.2.3

$$\boldsymbol{P}\text{がエルゴード的} \iff \boldsymbol{P}\text{が既約ですべての状態 } S_i \in S \text{ は非同期的}$$

(Note.) 状態 $S_i \in S$ の同期 $d(i)$ は $p_{ii}^{(n)} > 0$ となる n の最大公約数のこと。$d(i) = 1$ のとき、S_i は非同期的であるという。

定常分布と極限分布

$\tilde{\boldsymbol{p}} = \tilde{\boldsymbol{P}}\tilde{\boldsymbol{p}}$ を満たす $\tilde{\boldsymbol{p}}$ を定常分布という。
また任意の $S_i, S_j \in S$ に対し

$$\lim_{r \to \infty} p_{ij}^{(r)} = p_j$$

が成立するとき、極限分布という。

マルコフ連鎖の時点 r までの S_i への訪問回数を $\tau_i^{(r)}$ で表すと、

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{r}\tau_i^{(r)} = p_i$$

となり、平均訪問回数は i の定常分布と等しくなる。
またその逆数 $\dfrac{1}{\frac{1}{r}\tau_i^{(r)}}$ は平均再帰時間になる。

定理 7.2.4

S_i が再帰的であるための必要十分条件は

$$\sum_{r=1}^{\infty} p_{ii}^{(r)} = \infty$$

定理 7.2.5

S_j が非再帰的であるならば任意の $S_i \in S$ に対して

$$\lim_{r\to\infty} p_{ij}^{(r)} = 0$$

（例） state 数が 3 のケース

推移確率行列が　$\tilde{\boldsymbol{P}} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 & 0.5 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$　であるとする。

いま、　$\tilde{\boldsymbol{p}}_0 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.8 \\ 0.1 \end{pmatrix}$　とすると、　$\tilde{\boldsymbol{p}}_1 = \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.57 \\ 0.28 \end{pmatrix}$　となる。

$$\tilde{\boldsymbol{P}}^3 = \begin{pmatrix} 0.226 & 0.209 & 0.219 \\ 0.524 & 0.536 & 0.529 \\ 0.25 & 0.255 & 0.252 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{P}}^{15} = \begin{pmatrix} 0.2151899 & 0.2151899 & 0.2151899 \\ 0.5316456 & 0.5316456 & 0.5316456 \\ 0.2531646 & 0.2531646 & 0.2531646 \end{pmatrix}$$

となるので、極限分布をもつ。

したがって、定常分布は

$$\tilde{\boldsymbol{p}}_\infty = \begin{pmatrix} 0.215899 \\ 0.5316456 \\ 0.2531646 \end{pmatrix}$$

になる。