# 2010年度 エコノメトリックスII
# & 上級エコノメトリックスII
# 第2回講義メモ

2010年10月8日

## §2. 線形回帰モデル

### §2.1 基礎と推定法

#### 2.1.1 基本モデル

**スカラー表現**

まず、$y_t$ $(t = 1, \ldots, n)$ が、以下のように $x_t$ の一次関数と偶然変動 $u_t$ の和で表される線形単純回帰モデルを考えよう。

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + u_t \quad (t = 1, \ldots, n) \tag{2.1.1.$a$}$$

このとき、右辺の $x_t$ のことを**独立変数** (independent variable) または**説明変数** (explanatory variable)、$u_t$ のことを**撹乱項** (disturbance term) と呼ぶ。また左辺の $y_t$ のことを**従属変数** (dependent variable) または**被説明変数**と呼ぶ。

いま、$y_t$ が (2.1.1.a) 式で生成されるとき、$x_t$ を条件としたときの、$y_t$ の条件付期待値を求めよう。

$$\mathrm{E}(y_t \mid x_t) = \beta_0 + \beta_1 x_t + \mathrm{E}(u_t \mid x_t)$$

これより、$u_t$ について

$$\mathrm{E}(u_t \mid x_t) = 0 \quad (t = 1, \ldots, n) \tag{2.1.1.$b$}$$

という仮定をおくと、$\mathrm{E}(y_t \mid x_t) = \beta_0 + \beta_1 x_t$ が得られる。

(2.1.1.b) 式の仮定より、

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(u_t) &= \mathrm{E}_x\left(\mathrm{E}(u_t \mid x_t)\right) = \mathrm{E}_x(0) = 0 \\
\mathrm{E}(x_t u_t) &= \mathrm{E}_x\left(\mathrm{E}(x_t u_t \mid x_t)\right) = \mathrm{E}_x\left(x_t \mathrm{E}(u_t \mid x_t)\right) = \mathrm{E}_x\left(x_t \times 0\right) = 0
\end{aligned}$$

という 2 式が成立する。

### ベクトル・行列表現

では、(2.1.1.a) 式をベクトルを用いて表現してみよう。
$\boldsymbol{x}_t = (1,\, x_t)'$、$\boldsymbol{\beta} = (\beta_0,\, \beta_1)'$ とおくと、(2.1.1.a) 式は、

$$y_t = \boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{\beta} + u_t \tag{2.1.1.c}$$

と書ける。また、

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1' \\ \boldsymbol{x}_2' \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u} \tag{2.1.1.d}$$

で表現できる。さらに攪乱項に関する仮定は $\mathrm{E}(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{0}$ となり、ここから $\mathrm{E}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ および $\mathrm{E}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ が導き出される。

## 2.1.2 モーメント法

さて、我々に課された問題は、観測可能な $(y_t,\, \boldsymbol{x}_t)$, $(t = 1, \ldots, n)$ の組から $\boldsymbol{\beta}$ を推定することである。

一つの推定法は、攪乱項に関する仮定から導かれる $\mathrm{E}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ という条件を標本モーメント（標本平均）で置き換え、これを満たす $\beta$ を求めるものである。すなわち

$$\frac{1}{n}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} \boldsymbol{1}'\boldsymbol{u} \\ \tilde{\boldsymbol{x}}'\boldsymbol{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

を満たす $\boldsymbol{\beta} = \hat{\boldsymbol{\beta}}$ を求める。ここで、$\boldsymbol{1} = (1,\, 1,\, \cdots,\, 1)'$、$\tilde{\boldsymbol{x}} = (x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n)'$ である。
$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\beta$ であるから、$\hat{\beta}$ は

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u} = \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{0}$$

という正規方程式 (normal equation) を満たしている。$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ が full rank であるならば逆行列が存在するので、

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} = \left(\sum_{t=1}^{n} \boldsymbol{x}_t\boldsymbol{x}_t'\right)^{-1}\left(\sum_{t=1}^{n} \boldsymbol{x}_t y_t\right) \tag{2.1.2.a}$$

が得られる。この推定法をモーメント法（MM; Method of Moment) という。

### 2.1.3 OLS 推定量の導出

再び線形回帰モデル $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u}$ に戻ろう。いま攪乱項の 2 乗和

$$S(\boldsymbol{\beta}) \equiv \sum_{t=1}^{n} u_t^2 = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})$$

は $\boldsymbol{\beta}$ の関数であるので、$S(\boldsymbol{\beta})$ を最小にする $\boldsymbol{\beta} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS}$ を最小 2 乗推定量と定義しよう。すなわち、

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} = \arg\min_{\boldsymbol{\beta}} S(\boldsymbol{\beta})$$

である。

$S(\boldsymbol{\beta})$ の最小値を求めるためには、スカラーである $S(\boldsymbol{\beta})$ をベクトルである $\boldsymbol{\beta}$ で偏微分しなければならない。先に進む前に、ベクトルの微分について簡単に説明しておこう。

#### ベクトルの微分

いま、$g : R^k \to R$ である関数 $z = g(\boldsymbol{w})$ を考える。ここで、$\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_k)'$ である。

このとき、スカラー $z$ のベクトル $\boldsymbol{w}$ による微分を次のように定義する。

$$\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{w}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial w_1} \\ \frac{\partial z}{\partial w_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial z}{\partial w_k} \end{pmatrix}$$

このように、ベクトル $\boldsymbol{w}$ による微分は、$z$ を $\boldsymbol{w}$ の第 $i$ 要素で微分したものを第 $i$ 要素とする $k \times 1$ ベクトルとして表現される。

次に、ベクトルの積の微分を考えることにしよう。理解のために、以下のような $2 \times 1$ のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を考えよう。

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ であるから、$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}$ で微分すると

$$\frac{\partial(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b})}{\partial \boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b})}{\partial a_1} \\ \frac{\partial(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b})}{\partial a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

となる。また、$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{b}$ で微分すると

$$\frac{\partial(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b})}{\partial \boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b})}{\partial b_1} \\ \frac{\partial(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b})}{\partial b_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}$$

が得られる。

**OLS 推定量**

さて、撹乱項の 2 乗和である $S(\boldsymbol{\beta})$ を最小化する 1 階の条件は、

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}$$

である。また

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{\beta}) \;=\; \boldsymbol{u}'\boldsymbol{u} \;&=\; (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}) \\ &=\; \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} &= \frac{\partial \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{\beta}} - \frac{\partial \boldsymbol{\beta}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\beta}} - \frac{\partial (\boldsymbol{y}'\boldsymbol{X})\boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \frac{\partial \boldsymbol{\beta}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})\boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \\ &= 0 - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \{(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})\boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})\boldsymbol{\beta}\} \\ &= -2\{\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})\boldsymbol{\beta}\} = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.1.3.a}$$

が得られる。別法として、合成関数の微分を行えば

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} &= \frac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial \boldsymbol{\beta}} \frac{\partial S(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{u}} \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial \boldsymbol{\beta}} \frac{\partial \boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{u}} \\ &= -\frac{\partial \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'}{\partial \boldsymbol{\beta}} \frac{\partial \boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{u}} = -\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}) = -2\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

が得られる。

(2.1.3.a) 式より、$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})$ が full rank であれば、逆行列が存在するから、$\boldsymbol{\beta}$ の OLS 推定量は

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} \tag{2.1.3.b}$$

として得られる。これは、前節で求めたモーメント法推定量（(2.1.2.a) 式）と同一である。