

2010年度 学部 エコノメトリックス 学期末試験解答

2011年4月1日

問題 1

(1)

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 5 \\ 1 & 7 \\ 1 & 9 \\ 1 & 13 \\ 1 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 7 & 56 \\ 56 & 488 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \frac{1}{280} \begin{pmatrix} 488 & -56 \\ -56 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61/35 & -1/5 \\ -1/5 & 1/40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.743 & -0.2 \\ -0.2 & 0.025 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61/35 & -1/5 \\ -1/5 & 1/40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 49 \\ 350 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77/5 \\ -21/20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.4 \\ -1.05 \end{pmatrix}$$

(4) 残差ベクトル $\mathbf{e}$ は

$$\mathbf{e} = (0, 37/20, -41/20, 41/20, 1/4, -2, -1/10)'$$

であるから、残差 2 乗和は $\mathbf{e}'\mathbf{e} = \frac{6360}{400} = 15.9$ になる。したがって決定係数 R^2 は

$$R^2 = 1 - \frac{15.9}{60} = 0.735$$

(5)

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{7-2} 15.9 = 3.18$$

(6)

$$\widehat{\text{Var}}(b_1) = \left\{ \hat{\sigma}^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \right\}_{11} = \frac{9699}{1750} = 5.543$$

(7) H_0 の下で、

$$\frac{b_1 - \beta_1}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(b_1)}} \sim t(5)$$

である。ところで、検定統計量 τ_1 を求めると

$$\tau_1 = \frac{15.4 - 10}{2.3542} = 2.294$$

になる。自由度 5 の t 分布の上側 5% 点は 2.015。 $\tau_1 > 2.015$ より、 H_0 を棄却する。(8) 平均: $E(b_1 + 10b_2) = \beta_1 + 10\beta_2$ (不偏推定量より)分散: $\text{Var}(b_1 + 10b_2) = \text{Var}(b_1) + 20\text{Cov}(b_1, b_2) + 100\text{Var}(b_2)$

$$= \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & 10 \end{pmatrix} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

分布: 正規分布

(9) H_A を書き直すと、 $\beta_1 + 10\beta_2 = 0$ 、 H_B を書き直すと、 $\beta_1 + 10\beta_2 \neq 0$ になる。

$$\tau_A = \frac{(b_1 + 10b_2) - 0}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(b_1 + 10b_2)}} = \frac{4.9}{\sqrt{3.18 \times \frac{17}{70}}} = \frac{4.9}{0.88} = 5.56$$

対立仮説 H_B より、両側検定を行う。自由度 5 の t 分布の上側 2.5% 点は 2.571。 $|\tau_A| > 2.571$ より、 H_A を棄却する。

問題 2

(1) 不偏性と一致性は満たしているが、効率性は満たしていない。

$$(2) \text{Var}(\mathbf{b}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{\Omega}\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

$$(3) \mathbf{b}_{GLS} = (\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{y}$$

$$(4) \text{Var}(\mathbf{b}_{GLS}) = (\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}\mathbf{X})^{-1}$$

(5) 不偏性、一致性、効率性共に満たしている。(または、最良線形不偏推定量である。)

(6)

$$Y_i^* = \begin{cases} Y_i & i = 1, 5, 7 \\ \frac{1}{8}Y_i & \text{otherwise} \end{cases}, \quad X_{1,i}^* = \begin{cases} 1 & i = 1, 5, 7 \\ \frac{1}{8} & \text{otherwise} \end{cases}, \quad Y_{2,i}^* = \begin{cases} X_{2,i} & i = 1, 5, 7 \\ \frac{1}{8}X_{2,i} & \text{otherwise} \end{cases}$$

と変換し、回帰式 $Y_i^* = \tilde{\beta}_1 X_{1,i}^* + \tilde{\beta}_2 X_{2,i}^* + u_i$ を最小 2 乗推定すればよい。

問題 3

(1) 不偏性と一致性は満たしているが、効率性は満たしていない。

(2)

$$d = \frac{\sum_{i=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_t^2} \approx 2(1 - \phi_1)$$

$n \rightarrow \infty$ のとき、 d は $2(1 - \phi_1)$ に収束する。

(3) 数表の $n = 12$, $k^* = 2$ の欄より、 $d_L = 0.812$, $d_U = 1.579$ 。よって、

$$4 - d_U = 2.421, \quad 4 - d_L = 3.188$$

が得られる。 $d < 4 - d_U$ であるので、 H_0 は棄却できない。

(6) 定数項を含む説明変数および被説明変数について、

$$z_t^* = \begin{cases} \sqrt{1 - \hat{\phi}_1^2} z_t & t = 1 \\ z_t - \hat{\phi}_1 z_{t-1} & t = 2, \dots, n \end{cases}$$

(ここで z_t は変換前の変数を表している) と変換して、最小 2 乗推定すればよい。

(7) $epwrt_{t-1}$ と $\epsilon_t = \phi_1 \epsilon_{t-1} + \xi_t$ の間に相関が生じるため、一致性が満たされない。(当然、不偏性、一致性も満たされない。)

期末試験(100点満点)の素点平均は41.6点、素点標準偏差は21.8点であった。
 (なお最高点は90点、最低点は0点である。)
 学年別の素点平均と、素点標準偏差は下表のとおりである。

	全体	2年	3年	4年	その他
平均	41.6	45.4	39.7	39.6	44.3
標準偏差	21.8	24.0	21.8	15.9	25.1

授業中に説明したとおり、偏差値と同種の調整を行い、平均が65点、標準偏差が15点となるように素点を変換した上で、成績評価を行った。

エコノメトリックス2010 期末試験成績分布

