

2

2010 年度 学部 エコノメトリックス
第 2 回講義メモ (増補版)2010 年 10 月 6 日
2010 年 10 月 12 日 (訂正)

1.3 モデルと推定

決定論的モデルと確率モデル

経済理論から導出されるモデルの推定を考えることにしよう。投資関数を例に挙げると、投資 I は所得 Y と利子率 r の関数であるから、

$$I = I(Y, r)$$

のように表すことができる。

投資行動を表す関数であるこのモデルは、 Y と r を与えれば、 I が (自動的に) 決まるという、因果的関係を暗黙のうちに仮定している。また、投資関数が連続微分可能であるという、経済理論でよく課される仮定を踏まえると、 Y と r を与えれば、 I が一意に決まることになる。

3

このように、経済理論のモデルは決定論的モデルになっている。
ところで、実際には Y と r が同一であっても、異なる I が観測されることがある。これは、どのように考えればよいのであろうか。

一つの解決策は、「偶然変動」の導入である。観測される投資を I^* 、投資関数で決定される投資を I 、偶然変動を ϵ で表すと、

$$I^* = I + \epsilon = I(Y, r) + \epsilon$$

という関係になる。もちろん偶然変動 ϵ は、「偶然」におきる変動であるから平均的にゼロ、すなわち ϵ を確率変数であると仮定すれば $E(\epsilon) = 0$ になる。したがって、観測される投資 I^* も確率変数になり、

$$E(I^*) = I(Y, r) + E(\epsilon) = I(Y, r)$$

のように、平均的に投資関数で決定される値に等しくなることが得られる。

4

偶然変動の要因

では、この偶然変動は一体なにによってもたらされるのであろうか。さまざまな要因が考えられるが、凡そ次のものを挙げることができよう。

- (a) 外性的ショック
- (b) 観測誤差
- (c) 理論上の概念と観測上の概念のズレ
- (d) 関数形の定式化の誤りによるズレ、近似によるズレ

上記のうち、(c), (d) を偶然変動として扱うのは厳密に言えば無理があるが、ズレの値が得られないのであれば、近似としてそれを偶然変動と見做すことに一定の合理性はあるものとする。

5

推定モデル

いま、 Y_i ($i = 1, \dots, n$) が、以下のように X_i の一次式と偶然変動 ϵ の和で表されるものとしよう。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \epsilon_i \quad (1.3.1)$$

このとき、右辺の X_i のことを**独立変数** (independent variable) または**説明変数** (explanatory variable)、 ϵ_i のことを**攪乱項** (disturbance term) と呼ぶ。また左辺の Y_i のことを**従属変数** (dependent variable) または**被説明変数**と呼ぶ。

一般には X_i を確率変数として扱うが、しばしば簡単化のために非確率変数として扱うこともある。

6

モデルが満たしていなければならない条件

X_i が確率変数であるとき、(1.3.1) 式の X_i を条件とする条件付期待値を求めよう。

$$E(Y_i | X_i) = \alpha + \beta X_i + E(\epsilon_i | X_i)$$

これより、 $E(Y_i | X_i) = \alpha + \beta X_i$ となるためには、

$$E(\epsilon_i | X_i) = 0 \quad (1.3.2)$$

であることが必要である。

7

(1.3.2) 式が満たされるとき、

$$E(\epsilon_i) = 0 \text{ および } E(X_i \epsilon_i) = 0 \quad (1.3.3)$$

という 2 式が成立する。なぜなら、条件付期待値が条件に依存しないので、

$$\begin{aligned} E(\epsilon_i | X_i) &= 0 = E(\epsilon_i) \\ E(X_i \epsilon_i | X_i) &= X_i E(\epsilon_i | X_i) = 0 = E(X_i \epsilon_i) \end{aligned}$$

のように、無条件期待値に一致するからである。

なお、 X_i が非確率変数であるとき、 Y_i の無条件期待値は $E(Y_i) = \alpha + \beta X_i$ となるので、(1.3.3) 式が成立することは明らかである。

8

係数の推定

さて、我々に課された問題は、観測可能な (Y_i, X_i) , $(i = 1, \dots, n)$ の組から α, β を推定することである。

一つの推定法は、(1.3.3) 式を標本モーメント（標本平均）で置き換えた

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \epsilon_i = 0 \quad (1.3.4)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \epsilon_i = 0 \quad (1.3.5)$$

を満たす α, β を求め、それを推定値 a, b とするものである。

9

 a, b は、二本の正規方程式 (normal equation) の解として一意に求まる。この推定法をモーメント法 (MM; Method of Moment) という。

Y_i の推定とモデルの当てはまり程度

 α, β の推定値 a, b を用いると、 Y_i の推定値、すなわち（条件付）期待値 $E(Y_i | X_i)$ の推定値は、 $\hat{Y}_i = a + bX_i$ で得ることができる。いま e_i を

$$e_i \equiv Y_i - \hat{Y}_i$$

で定義し、**残差** (residual) と呼ぶ。実は、 e_i は (1.3.4) 式および (1.3.5) 式を標本モーメントで置き換えたものに等しいから、

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i = 0 \quad (1.3.6)$$

10

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i e_i = 0 \quad (1.3.7)$$

が成立する。

他方、 $\bar{Y}$ 、 $\bar{\bar{Y}}$ をそれぞれ、

$$\bar{Y} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \quad \bar{\bar{Y}} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{Y}_i$$

と定義すると、

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i + e_i) = \bar{\bar{Y}}$$

が得られる。この関係をもちいると、（標本）全変動は

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n \left\{ (Y_i - \hat{Y}_i) + (\hat{Y}_i - \bar{\bar{Y}}) \right\}^2$$

11

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n e_i^2 + \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{\bar{Y}})^2 + 2 \sum_{i=1}^n e_i (\hat{Y}_i - \bar{\bar{Y}}) \\ &= \sum_{i=1}^n e_i^2 + \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{\bar{Y}})^2 \end{aligned}$$

残差 2 乗和 (第 1 項) とモデルで説明される変動 (第 2 項) の和で表すことができる。（なぜなら、 $e_i \hat{Y}_i = a e_i + b X_i e_i$ であるので、第 3 項目はゼロになる。）

この式の両辺を（標本）全変動で割ると、

$$1 = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{\bar{Y}})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$$

12

が得られ、モデルで説明される変動と（標本）全変動の比を R^2 で表すと、

$$R^2 \equiv \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{\bar{Y}})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$$

となる。この R^2 はモデルの「当てはまりの良さ」を表す指標の一つであり、**決定係数** (coefficient of determination) と呼ばれる。 $0 \leq R^2 \leq 1$ であり、すべての残差がゼロの場合（すなわち完全にモデルで説明される場合）には $R^2 = 1$ 、モデルの説明力が全くない場合には $R^2 = 0$ という値をとる。