2010年度 学部 エコノメトリックス
第3回講義メモ

2010年10月12日
2010年10月13日(訂正版)

3

§ 2. 線形単回帰モデル

2.1 古典的線形単回帰モデル

前回扱った(1.3.1)式に戻ろう。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \epsilon_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.3.1)$$

この式を**線形単回帰モデル**(linear simple regression model)と呼ぶ。なお「単」という語は、定数項を除いて説明変数が一つしかないことを指している。

4

いま、このモデルに対し、次の仮定をおく(古典的仮定ともいう)。

- 仮定 1 X_i は非確率的(non-stochastic)変数である。
- 仮定 2 攪乱項 ϵ_i の期待値はゼロ、すなわち $E(\epsilon_i) = 0$ 。
- 仮定 3 攪乱項 ϵ_i の分散が存在し、全ての i について一定。すなわち $\text{Var}(\epsilon_i) = \sigma^2$ 。
- 仮定 4 攪乱項 ϵ_i は互いに独立。したがって、 $\text{Cov}(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0 \quad (i \neq j)$ 。

また、仮定 2~4 は一つにまとめて、

仮定 2' $\epsilon_i \sim IID(0, \sigma^2)$

のように表現されることがある。(IID は**独立同一分布** independently identically distributed の略。)

5

ところで、仮定 2' は攪乱項 ϵ_i の分布の平均と分散しか特定化していない(平均がゼロで分散が σ^2 で一定であれば、どんな分布に従っていてもよい)が、分布を正規分布に特定化することがある。この場合、仮定 2~4 は

仮定 5 $\epsilon_i \sim iid N(0, \sigma^2)$

に変わる。

Note

1. 教科書では**仮定 4**を、独立ではなく、無相関と記しているが、この授業では「独立」として扱う。(独立を仮定すれば、無相関は成立するが、その逆は一般には成り立たない。また、無相関と仮定したときには、独立を仮定したときに比べ、中心極限定理が成立する条件

6

が多少難しくなる。)

2. この**仮定 1~4**(または**仮定 1**および**仮定 5**)は、係数 α, β の推定量の分布を求めるために必要である。

2.2 最小2乗法

さて我々に課された問題は、観測された $(Y_i, X_i) \quad (i = 1, \dots, n)$ の組から、(1.3.1)式における係数 α, β を推定することにある。

仮定 2より $E(\epsilon_i) = 0$ である。また、**仮定 3**、**仮定 4**から大数の法則により $n \rightarrow \infty$ において

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \epsilon_i = 0 \quad (2.2.1)$$

7

が成立するが、**仮定 1~4**のみからは任意の n について $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \epsilon_i = 0$ の成立を導出できないことに注意。

推定の一つの方法として、損失関数(loss function)を最小にする係数を求めることが考えられる。損失関数として、

- $T(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n |\epsilon_i| = \sum_{i=1}^n |Y_i - \alpha - \beta X_i|$
- $S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2$

などが考えられるが、 $T(\alpha, \beta)$ の最小化は絶対値を含むため、数学的にやっかい。*1そこで、 $S(\alpha, \beta)$ の最小化を考える。これが最小2乗法(Ordinary Least Squares)である。

*1 $T(\alpha, \beta)$ を最小化する推定量は LAD(Least Absolute Deviation) 推定量と呼ばれる。

8

さて、 $S(\alpha, \beta)$ の最小化

$$\min_{\alpha, \beta} S(\alpha, \beta)$$

のための一階の条件は、

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0$$

であるから、連立方程式（正規方程式と呼ぶ）

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n -2(Y_i - \alpha - \beta X_i) = 0 \quad (2.2.2)$$

および

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n -2X_i(Y_i - \alpha - \beta X_i) = 0 \quad (2.2.3)$$

9

の解 a, b が求める推定量になっている。

いま、

$$\bar{X} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \bar{Y} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i,$$

とおくと、 a, b は

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \quad (2.2.4)$$

$$a = \bar{Y} - b\bar{X} \quad (2.2.5)$$

として得られる。さらに $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})\bar{Y} = 0$ であることに注目し、

$$w_i \equiv \frac{(X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

10

とすると、(2.2.4) 式は

$$b = \sum_{i=1}^n w_i Y_i \quad (2.2.6)$$

のように、非確率変数 w_i をウエイトとした確率変数 Y_i の加重和（または線形関数）の形で表現できる。

これより、最小 2 乗推定量は確率変数であり、また統計量であることが確認できる。

モーメント法推定量との関係

正規方程式の (2.2.2) 式、(2.2.3) 式は、モーメント法における直交条件 (1.3.6) 式、(1.3.7) 式にそれぞれ等しい。したがって、**仮定 1~4** の下では、最小 2 乗推定量とモーメント法推定量は一致する。

11

2.3 最小 2 乗推定量の分布

前に示したように、 a, b は確率変数であるから、その分布を求めることにしよう。まず、 a, b の期待値と分散を求めることから始めよう。

(2.2.6) 式より、

$$\begin{aligned} b &= \sum_{i=1}^n w_i Y_i = \sum_{i=1}^n w_i (\alpha + \beta X_i + \epsilon_i) \\ &= \beta \sum_{i=1}^n w_i X_i + \sum_{i=1}^n w_i \epsilon_i \\ &= \beta + \sum_{i=1}^n w_i \epsilon_i \end{aligned}$$

12

上式の期待値をとると、

$$E(b) = \beta + \sum_{i=1}^n w_i E(\epsilon_i) = \beta \quad (2.3.1)$$

が得られる。さらに b の分散は、

$$\begin{aligned} \text{Var}(b) &= E[(b - \beta)^2] = E\left[\sum_{i=1}^n (w_i \epsilon_i)^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^n w_i^2 E(\epsilon_i^2) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n w_i^2 \\ &= \sigma^2 \frac{1}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \end{aligned}$$

として得られる。

13

同様に a についても、(2.2.5) 式より期待値は、

$$\begin{aligned} E(a) &= E(\bar{Y}) - E(b\bar{X}) \\ &= \alpha + \beta\bar{X} + E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \epsilon_i\right] - E(b\bar{X}) \\ &= \alpha + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(\epsilon_i) - [E(b - \beta)]\bar{X} = \alpha \end{aligned}$$

となり、分散は、

$$\text{Var}(a) = E[(a - \alpha)^2] = \sigma^2 \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

となる。