

2

2010 年度 学部 エコノメトリックス
第 11 回講義メモ (訂正版)2010 年 11 月 10 日
2010 年 11 月 19 日 (訂正)

3.5 重回帰モデルにおける検定問題

 $\mathbf{b}$ の分布(3.3.4) 式より、 β の OLS 推定量は

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \\ &= \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\epsilon\end{aligned}$$

であるので、その期待値 (平均) と分散は

$$E(\mathbf{b}) = \beta, \quad \text{Var}(\mathbf{b}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

となる。

 $\mathbf{b}$ の分布は、攪乱項 ϵ の仮定によって異なり、**仮定 5** $\epsilon \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$

3

の場合には、

$$\mathbf{b} \sim N(\beta, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$$

という厳密な分布が得られる。他方、**仮定 2'** $\epsilon \sim IID(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$ の場合には、 $\mathbf{b}$ の厳密な分布は得られず、中心極限定理より

$$\mathbf{b} \xrightarrow{d} N(\beta, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}) \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad (3.5.1)$$

という漸近分布しか求めることが出来ない。ちなみに、(3.5.1) 式の表現は正確ではなく、

$$\sqrt{n}(\mathbf{b} - \beta) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{Q}^{-1}) \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad (3.5.2)$$

という表現の方が正しい。なお、

$$\mathbf{Q} \equiv \text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbf{X}'\mathbf{X} < +\infty$$

4

である。

個々の係数に関する検定

個々の回帰係数 β_j ($j = 1, \dots, k$) に関する検定統計量は

$$\tau_j = \frac{b_j - \beta_j}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 ((\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})_{jj}}} \quad (3.5.3)$$

であるが、攪乱項 ϵ に関する仮定が**仮定 5** の場合には、

$$\tau_j \sim t(n - k)$$

という厳密分布が得られ、**仮定 2'** の場合には、

$$\tau_j \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

という漸近分布が得られるので、これを用いて仮説検定を行う。

5

複数の係数の同時検定問題

以下では、説明の簡単化のために攪乱項に関して**仮定 5**をおくことにしよう。複数の係数を同時に検定するには、 τ_j とは異なる検定統計量を用いる。いま、同時に検定したい問題が次の式で表現できるものとしよう。

$$\begin{cases} H_0: & \mathbf{R}\beta = \mathbf{r} \\ H_1: & \mathbf{R}\beta \neq \mathbf{r} \end{cases}$$

ここで、 $\mathbf{R}$ は $m \times k$ 行列であり、 m ($m \leq k$) 個の係数間制約があることを表している。**仮定 5** の下で、係数 β の最小 2 乗推定量 $\mathbf{b}$ の分布は

$$(\mathbf{b} - \beta) \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$$

6

であるから、次の 2 次形式は

$$\frac{(\mathbf{b} - \beta)'(\mathbf{X}'\mathbf{X})(\mathbf{b} - \beta)}{\hat{\sigma}^2} \sim \chi^2(k)$$

と、自由度 k のカイ 2 乗分布に従う。さらに、 σ^2 を不偏推定量 $\hat{\sigma}^2 \equiv \mathbf{e}'\mathbf{e}/(n - k)$ で置き換え、分子を k で割ると、

$$\frac{(\mathbf{b} - \beta)'(\mathbf{X}'\mathbf{X})(\mathbf{b} - \beta)/k}{\hat{\sigma}^2} \sim F(k, n - k)$$

という結果がえられる。この結果を使うと、 $\mathbf{Rb}$ の分布は

$$\mathbf{R}(\mathbf{b} - \beta) = (\mathbf{Rb} - \mathbf{r}) \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{R}')$$

であるので、

$$f = \frac{(\mathbf{Rb} - \mathbf{r})'(\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{R}')^{-1}(\mathbf{Rb} - \mathbf{r})/m}{\hat{\sigma}^2} \sim F(m, n - k) \quad (3.5.4)$$

7

が得られ、F 検定によって仮説を検定できることがわかる。(3.5.4) 式の計算は大変なように見えるが、実は通常の最小2乗推定と、 $\mathbf{R}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$ という制約があるときの最小2乗推定という、2つの推定を行い、それぞれの推定式の残差2乗和を用いて、簡単に求めることができる。そこで以下では、係数間に制約があるときの最小2乗推定量について考察することにする。

制約付最小2乗法

制約条件があるときの最小2乗推定量を考えることにしよう。このときの最小化問題は、 $S = \mathbf{e}'\mathbf{e}$ とおくと、

$$\min_{\boldsymbol{\beta}} S \quad \text{subject to } (\mathbf{R}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

8

となるので、ラグランジェ乗数法を使って解くことができる。すなわち、目的関数

$$S^* = S + \boldsymbol{\lambda}'(\mathbf{R}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{r})$$

が最小となる $\boldsymbol{\beta}$ を求めることになる。最小化のための1階の条件より、

$$\frac{\partial S^*}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \mathbf{R}'\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$$

であるが、 $\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -2\mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$ であることから、

$$-2\mathbf{X}'\mathbf{y} + 2(\mathbf{X}'\mathbf{X})\boldsymbol{\beta} + \mathbf{R}'\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (3.5.5)$$

(3.5.5) 式の左から $\frac{1}{2}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ をかけると、求める制約付最小2乗推定量 $\mathbf{b}^+$ は、

$$\mathbf{b}^+ = \mathbf{b} - \frac{1}{2}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'\boldsymbol{\lambda} \quad (3.5.6)$$

9

となる。ところで、(3.5.5) 式の左から $\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ をかけて整理すると、

$$\boldsymbol{\lambda} = 2[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}) \quad (3.5.7)$$

となるので、(3.5.7) 式を (3.5.6) 式に代入すると、

$$\mathbf{b}^+ = \mathbf{b} - (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}[\mathbf{R}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}]^{-1}\mathbf{R}'(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}) \quad (3.5.8)$$

となる。両辺から $\boldsymbol{\beta}$ を引くと、

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^+ - \boldsymbol{\beta} &= (\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}) - (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}) \\ &= [\mathbf{I} - (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\mathbf{R}](\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}) \end{aligned}$$

となるから、 $E(\mathbf{b}^+) = \boldsymbol{\beta}$ 。よって不偏推定量である。また、この推定量の分散は、

$$\text{Var}(\mathbf{b}^+) = \sigma^2[\mathbf{I} - (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\mathbf{R}](\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

10

$$\begin{aligned} &\times [\mathbf{I} - \mathbf{R}'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}] \\ &= \sigma^2[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} - (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}] \end{aligned}$$

であることがわかる。

検定統計量 f の導出

制約付き最小2乗法で推定した回帰式の残差 $\mathbf{e}^+$ は、(3.5.8) 式から

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^+ &\equiv \mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b}^+ \\ &= (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b}) - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}) \\ &= \mathbf{e} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}) \end{aligned}$$

で表すことができる。よって、その残差2乗和は、

$$\mathbf{e}^{+'}\mathbf{e}^+ = \mathbf{e}'\mathbf{e} - \mathbf{e}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta})$$

11

$$\begin{aligned} &-(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta})'\mathbf{R}'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{e} \\ &+ (\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta})'\mathbf{R}'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}' \\ &\times [\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}) \\ &= \mathbf{e}'\mathbf{e} + (\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta})'\mathbf{R}'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}) \end{aligned}$$

となる (なぜなら、 $\mathbf{X}'\mathbf{e} = \mathbf{0}$)。 (3.5.6) 式を整理すると、

$$\mathbf{e}^{+'}\mathbf{e}^+ - \mathbf{e}'\mathbf{e} = (\mathbf{R}\mathbf{b} - \mathbf{r})'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}(\mathbf{R}\mathbf{b} - \mathbf{r}) \quad (3.5.9)$$

が得られるので、(3.5.4) 式に (3.5.9) 式を代入すると、

$$f = \frac{(\mathbf{e}^{+'}\mathbf{e}^+ - \mathbf{e}'\mathbf{e})/m}{\mathbf{e}'\mathbf{e}/(n-k)}$$

のように、通常の最小2乗推定と、制約付き最小2乗推定の、2つの推定式の残差2乗和を用いても検定統計量 f が求められることを確認できる。

12

f 統計量を用いた検定の例

- $\beta_2 = \dots = \beta_k = 0$ の検定
統計分析ソフトウェアで出力される F 検定
- 構造変化の検定 (Chow test)