

2

2010 年度 学部 エコノメトリックス
第 15 回講義メモ (訂正 2 版)2010 年 11 月 30 日
2010 年 12 月 1 日

§ 4 一般化最小 2 乗法

4.1 総論

問題の把握

いままでは、線形回帰モデル

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \quad (4.1.1)$$

において、攪乱項 $\boldsymbol{\epsilon}$ について仮定 2' $\boldsymbol{\epsilon} \sim IID(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$

または

仮定 5 $\boldsymbol{\epsilon} \sim NID(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$

3

のどちらかの仮定を置いてきた。

いま、 $n \times n$ の可逆である（逆行列が存在する）対称行列 $\boldsymbol{\Omega}$ を考え、 $\text{Var}(\boldsymbol{\epsilon}) = \sigma^2 \boldsymbol{\Omega}$ で表されるケースに、仮定を緩和してより一般化しよう。この一般化は、

- (1) $\text{Var}(\epsilon_i) = E(\epsilon_i^2) = \sigma_i^2 \neq \sigma^2$
- (2) $\text{Cov}(\epsilon_i, \epsilon_j) = E(\epsilon_i \epsilon_j) \neq 0 \quad \text{for } i \neq j$

を許容することを意味する。

以下では、攪乱項 $\boldsymbol{\epsilon}$ についての仮定を仮定 6 $\boldsymbol{\epsilon} \sim IID(\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{\Omega})$

または

仮定 7 $\boldsymbol{\epsilon} \sim NID(\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{\Omega})$

4

で表すことにしよう。

まず、攪乱項 $\boldsymbol{\epsilon}$ についての仮定が**仮定 6** または**仮定 7** のとき、(4.1.1) 式における $\boldsymbol{\beta}$ の最小 2 乗推定量 $\mathbf{b}_{OLS}$ の性質がどのようなものであるかを確認することにしよう。

最小 2 乗推定量 $\mathbf{b}_{OLS}$ は $\mathbf{b}_{OLS} = \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\epsilon}$ と表すことができるから、期待値をとると、

$$E(\mathbf{b}_{OLS}) = \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'E(\boldsymbol{\epsilon}) = \boldsymbol{\beta}$$

が得られ、一般化したケースにおいても不偏推定量であることが分かる。

しかしながら、分散は

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{b}_{OLS}) &= E[(\mathbf{b}_{OLS} - \boldsymbol{\beta})(\mathbf{b}_{OLS} - \boldsymbol{\beta})'] \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'E(\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}')\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\ &= \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \end{aligned}$$

5

となり、後述するように、効率性を満たさない。また、従来の**仮定 2'** や**仮定 5** のときの分散 $\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ と異なっていることに注意する必要がある。

以上のことから、次のことが言える。

- (1) **仮定 6** または**仮定 7** の下でも、最小 2 乗推定量 $\mathbf{b}_{OLS}$ は不偏推定量である。
- (2) しかし、効率性は満たさない。
- (3) 最小 2 乗推定量 $\mathbf{b}_{OLS}$ の分散は**仮定 2'** や**仮定 5** のときとは異なるので、**仮定 2'** や**仮定 5** を仮定している統計ソフトが計算した $\mathbf{b}_{OLS}$ の標準偏差（標準誤差）や検定統計量 τ は正しくない。

したがって、モデルの推定（および分析）を行うに当たっては、次のいずれかの対策を施す必要がある。

6

対策 A 効率的な推定量を用いて推定を行う。**対策 B** 最小 2 乗推定量を用いるが、その分散を正しく計算したうえで検定等を行う。以下では、**対策 A** を中心に見てゆくことにしよう。

一般化最小 2 乗法

第 5 回授業で、従来の**仮定 2'** や**仮定 5** のときには、Gauss=Markov の定理より $\mathbf{b}_{OLS}$ が最良線形不偏推定量 (BLUE) であることを示した。ということは、攪乱項 $\boldsymbol{\epsilon}$ に線形変換を施して

$$\text{Var}(\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{\epsilon}) = \sigma^2\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Gamma} = \sigma^2\mathbf{I}_n \quad (4.1.2)$$

となるような変換行列 $\boldsymbol{\Gamma}$ を見つけられれば、(4.1.1) 式の左側から $\boldsymbol{\Gamma}'$ をかけて OLS 推定すると、BLUE が得られることになる。

7

さて、第13回授業で対称行列の固有値分解を紹介した。この結果を用いると、 Ω は直交行列 W によって

$$\Omega = W\Lambda W'$$

に分解できるから、 $\Gamma = W\Lambda^{-1/2}$ とすると、

$$\begin{aligned}\text{Var}(\Gamma'\epsilon) &= \Gamma'E(\epsilon\epsilon')\Gamma = \sigma^2\Gamma'\Omega\Gamma \\ &= \sigma^2\Lambda^{-1/2}W'(W\Lambda W')W\Lambda^{-1/2} \\ &= \sigma^2I_n\end{aligned}$$

が得られる。

これより、(4.1.1) 式の左側から Γ' をかけると

$$\Gamma'y = \Gamma'X\beta + \Gamma'\epsilon \quad (4.1.3)$$

8

になるので、このモデルの OLS 推定量は

$$\begin{aligned}b_{GLS} &= (X'\Gamma\Gamma'X)^{-1}(X'\Gamma\Gamma'y) \\ &= (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\Gamma\Gamma' = W\Lambda^{-1/2}\Lambda^{-1/2}W' = W\Lambda^{-1}W' = \Omega^{-1}$$

になっている。