

2010 年度 学部 エコノメトリックス
第 16 回講義メモ (訂正版)

2010 年 12 月 1 日

2

4.1 総論 (続)

一般化最小 2 乗推定量 (GLSE) の分布

β の GLS 推定量は、

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{GLS} &= (\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{y} \\ &= \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\epsilon \end{aligned}$$

となるので、その期待値と分散はそれぞれ、

$$\mathbf{E}(\mathbf{b}_{GLS}) = \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{E}(\epsilon) = \beta \quad (4.1.4)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{b}_{GLS}) &= \mathbf{E} \left[(\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\epsilon\epsilon'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \right] \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}(\sigma^2\mathbf{\Omega})\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \\ &= \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

となる。

攪乱項 ϵ に関する仮定が、**仮定 7** のときは、 $\mathbf{b}_{GLS}$ の厳密な分布が得られ、

$$\mathbf{b}_{GLS} \sim N \left(\beta, \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \right)$$

となる。他方、**仮定 6** のときは、中心極限定理より漸近分布が得られ、

$$\sqrt{n}(\mathbf{b}_{GLS} - \beta) \xrightarrow{d} N \left(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{S}_{\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X}}^{-1} \right)$$

4

となる。ここで、

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{S}_{\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X}} < \infty$$

である。

一般化最小 2 乗推定量 (GLSE) が最良線型不偏推定量 (BLUE) であることの証明

回帰モデル $\mathbf{y}_{n \times 1} = \mathbf{X}_{n \times k} \beta_{k \times 1} + \epsilon_{n \times 1}$ において、 $\mathbf{E}(\epsilon\epsilon') = \sigma^2 \mathbf{\Omega}$ であり、 $\mathbf{\Omega}_{n \times n}$ は正則な対称行列であるとする。このとき、任意の線形推定量

$$\tilde{\beta} = \mathbf{Z}\mathbf{y} = [(\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1} + \mathbf{D}'] \mathbf{y}$$

6

を考える。ここで、 $\mathbf{D}_{n \times k}$ は定数からなる行列であるとする。 $\tilde{\beta}$ が不偏推定量であるとき、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\tilde{\beta}) &= \mathbf{E}(\mathbf{Z}\mathbf{y}) \\ &= [(\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1} + \mathbf{D}'] \mathbf{X}\beta \\ &\quad + [(\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1} + \mathbf{D}'] \mathbf{E}(\epsilon) \\ &= \beta + \mathbf{D}'\mathbf{X}\beta \end{aligned}$$

であるから、 $\mathbf{D}'\mathbf{X} = \mathbf{O}$ でなくてはならない。(ここで、 $\mathbf{O}$ は全ての要素が 0 からなる行列を表している。)

ところで、 $\tilde{\beta}$ の分散 (共分散) は、

$$\begin{aligned} \text{Var}(\tilde{\beta}) &= \mathbf{E}(\mathbf{Z}\epsilon\epsilon'\mathbf{Z}') \\ &= \sigma^2 \{ (\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1} + (\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{D} \\ &\quad + \mathbf{D}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1} + \mathbf{D}'\mathbf{\Omega}\mathbf{D} \} \end{aligned}$$

となるが、 $\mathbf{D}'\mathbf{X} = \mathbf{O}$ という性質を使うと、

$$\begin{aligned} \text{Var}(\tilde{\beta}) &= \sigma^2 \{ (\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1} + \mathbf{D}'\mathbf{\Omega}\mathbf{D} \} \\ &\geq \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1} = \text{Var}(\mathbf{b}_{GLS}) \end{aligned}$$

となる。仮定より $\mathbf{\Omega}$ は正則な対称行列であるから、正値定符号行列である。したがって、 $\mathbf{D} = \mathbf{O}$ でないかぎり、線形不偏推定量の分散は GLSE の分散よりも大きい。

ゆえに、GLSE は最良線型不偏推定量である。 ■

一般化最小 2 乗推定量 (GLSE) の分散が、最小 2 乗推定量 (OLSE) の分散以下であることの証明

$$\text{Var}(\mathbf{b}_{OLS}) = \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{\Omega}\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

7

$$\geq \sigma^2 (\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X})^{-1} = \text{Var}(\mathbf{b}_{GLS})$$

を証明するには、

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\Omega\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} - (\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X})^{-1} \geq \mathbf{O}$$

であることを示せばよい。いま、 $\mathbf{G}_{n \times k} = \Omega^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X})^{-1} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ とおくと、

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\Omega\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} - (\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X})^{-1} = \mathbf{G}'\Omega\mathbf{G}$$

と書き表すことができる。右辺の2次式に関しては、

定理: $\mathbf{A}$ を $n \times n$ の対称行列、 $\mathbf{B}$ を $n \times k$, ($k \leq n$) の行列とする。
このとき、 $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ であれば、 $\mathbf{B}'\mathbf{A}\mathbf{B} \geq \mathbf{O}$ 。

8

という行列に関する定理を使って、 $\mathbf{G}'\Omega\mathbf{G} \geq \mathbf{O}$ が成立することがいえる。

実行可能 GLS(feasible GLS)

いままで見てきたように、 Ω が既知であれば、GLS による β の推定は実行可能であり、 $\mathbf{b}_{GLS}$ は厳密に効率的 (exactly efficient) である。

しかしながら、一般には Ω は未知であり、推定する必要がある。もし、 Ω の一致推定量 $\hat{\Omega}$ が得られれば、 Ω を $\hat{\Omega}$ で置き換えた GLS 推定量

$$\mathbf{b}_{GLS}(\hat{\Omega}) = (\mathbf{X}'\hat{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\hat{\Omega}^{-1}\mathbf{y} \quad (4.1.6)$$

は漸近効率性 (asymptotic efficiency) を有する。

さて、 Ω は $n \times n$ の対称行列であるから、未知であるときには推定するパラメータの数は $\frac{n(n+1)}{2}$ 個になる。ところがデータの数 n であるの

9

で、パラメータ過多 (overparameterization) になっている。

したがって、GLS 推定が実行可能な状況は、 Ω の未知パラメータが少数のときのみであることが分かる。そのようなケースは、以下の二つに分類される。

- (A) Ω の要素の多くが0であるとき。
- (B) Ω の構造を規定するモデルが分かっているか、仮定できるとき。 Ω の構造を規定するモデルには、
 - (a) 不均一分散 (heteroscedasticity)
 - (b) ARMA(自己回帰移動平均) 型の系列相関
 - (c) パネルデータにおける変量効果モデル (ランダム効果モデル: random effect model ともいう) などがある。

10

以下では、(B) に挙げた3つのケースについて見てゆくことにしよう。

4.2 攪乱項の分散不均一性

加重最小2乗法

攪乱項 ϵ の分散共分散行列が、

$$\text{Var}(\epsilon) = E(\epsilon\epsilon') = \sigma^2\Omega = \sigma^2 \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2)$$

であるとしよう。この場合には、

$$\Gamma = \Omega^{-1/2} = \text{diag}\left(\frac{1}{\omega_1}, \dots, \frac{1}{\omega_n}\right)$$

となり、GLS は従属変数 y_i 、説明変数 x_{ji} ($j = 1, \dots, k$) のすべてに $\frac{1}{\omega_i}$ をかけた変数に対し OLS 推定することに相当するため、特に**加重最小2**

11

乗法 (WLS: weighted least squares) と呼ぶ。

加重最小2乗法では、 Ω 、すなわち ω_i^2 ($i = 1, \dots, n$) が既知の場合は、上記の方法でそのまま推定が可能であるが、未知の場合には ω_i^2 のモデル化が可能な場合に限って実行可能となる。いま、 ω_i^2 が独立変数ベクトル $\mathbf{z}_i$ の線形関数であらわされるとしよう。このとき、

$$E(e_i^2) = \sigma^2\omega_i^2 = \sigma^2(1 + \mathbf{z}_i'\boldsymbol{\gamma})$$

となる。実際には、まず OLS 推定をし、その OLS 残差の2乗 e_i^2 を $\mathbf{z}_i$ に回帰して、

$$e_i^2 = \sigma^2 + \mathbf{z}_i'(\sigma^2\boldsymbol{\gamma}) + \text{error}$$

によって $\hat{\omega}_i^2$ を得、実行可能 GLS に持ち込む。