

2010 年度 学部 エコノメトリックス 第 18 回講義メモ (板書追加版)

2010 年 12 月 8 日

2

§ 4.3 自己相関のある攪乱項

ここでは、攪乱項 ϵ_i について、

$$\text{Var}(\epsilon_i) = \sigma^2 \quad \forall i$$

であるが、

$$\text{Cov}(\epsilon_i, \epsilon_j) = E(\epsilon_i \epsilon_j) \neq 0 \quad i \neq j$$

であるケースを考えることにしよう。

上のような性質をもつ ϵ_i のモデルとして、**時系列モデル** (time series models) と呼ばれる次のものがよく用いられる。

自己相関モデル (Autoregressive model): AR(p)

$$\epsilon_t = \phi_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \phi_p \epsilon_{t-p} + \xi_t$$

3

移動平均モデル (Moving Average model): MA(q)

$$\epsilon_t = \xi_t + \theta_1 \xi_{t-1} + \cdots + \theta_q \xi_{t-q}$$

ここで、 $\xi_t \sim iid(0, \eta^2)$ とする。

時系列モデルにおいては、定常性 (stationarity) と呼ばれる概念が重要である。まず、定義を与えることから始めよう。

定義 4.3.1 共分散定常性 (弱定常性)

いま、 $\{\epsilon_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ が、以下の性質を持つとき、 ϵ_t は**共分散定常** (covariance stationary) または**弱定常** (weakly stationary) であるという。

$$(1) E(\epsilon_t) = 0 \quad \forall t \quad (\text{平均一定})^{*1}$$

*1 $E(\epsilon_t) = \mu$ であってもよいが、ここでは説明の簡単化のために $\mu = 0$ と仮定する。

4

$$(2) \text{Var}(\epsilon_t) = \eta^2 < +\infty \quad \forall t \quad (\text{分散均一})$$

$$(3) \text{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_s) = E(\epsilon_t \epsilon_s) = \gamma(|t - s|) \\ (\text{自己共分散は時間間隔 } |t - s| \text{ の関数})$$

いま、AR(1) モデル

$$\epsilon_t = \phi_1 \epsilon_{t-1} + \xi_t \quad (4.3.1)$$

を例に、共分散定常性の問題を考えることにしよう。

(4.3.1) 式の関係を順次代入してゆくと、

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= \xi_t + \phi_1 (\xi_{t-1} + \phi_1 \epsilon_{t-2}) \\ &= \xi_t + \phi_1 \xi_{t-1} + \phi_1^2 \xi_{t-2} + \cdots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \xi_{t-j} \end{aligned}$$

5

となるので、両辺の期待値をとると、

$$E(\epsilon_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j E(\xi_{t-j}) = 0 \quad (4.3.2)$$

が得られ、**定義 4.3.1** の (1) の性質を満たすことが分かる。

次に、 ϵ_t の分散について考えよう。(4.3.2) 式および $\xi \sim iid(0, \eta^2)$ という仮定より、

$$\text{Var}(\epsilon_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^{2j} E(\xi_{t-j}^2) = \eta^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^{2j} \quad (4.3.3)$$

が得られる。(4.3.3) 式の右辺に注目すると、

$$\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^{2j} = \begin{cases} \frac{1}{1-\phi_1^2} & \text{if } |\phi_1| < 1 \\ \infty & \text{if } |\phi_1| = 1 \end{cases}$$

6

となるので、 $|\phi_1| < 1$ のとき、有界な分散

$$\text{Var}(\epsilon_t) = \eta^2 \frac{1}{1-\phi_1^2}$$

を持つことが分かる。

さらに、 $t > s$ のとき、

$$\epsilon_t = \xi_t + \phi_1 \xi_{t-1} + \cdots + \phi_1^{t-s-1} \xi_{s+1} + \phi_1^{t-s} \epsilon_s$$

となるので、

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_s) &= E(\epsilon_t \epsilon_s) \\ &= \phi_1^{t-s} \text{Var}(\epsilon_s) = \phi_1^{t-s} \frac{1}{1-\phi_1^2} \eta^2 \end{aligned}$$

になる。同様に、 $t < s$ のときには、

$$\epsilon_s = \xi_s + \phi_1 \xi_{s-1} + \cdots + \phi_1^{s-t-1} \xi_{t+1} + \phi_1^{s-t} \epsilon_t$$

7

となるので、

$$\text{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_s) = \phi_1^{s-t} \text{Var}(\epsilon_t) = \phi_1^{s-t} \frac{1}{1 - \phi_1^2} \eta^2$$

が得られる。これより、

$$\text{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_s) = \phi_1^{|t-s|} \frac{1}{1 - \phi_1^2} \eta^2 = \gamma(|t-s|)$$

が得られ、**定義** 4.3.1 の (3) の性質を満たすことが分かる。

証明は省くが、 $|\phi_1| < 1$ は ϵ_t が共分散定常過程であるために必要十分条件になっている。