

2

2010 年度 学部 エコノメトリックス 第 19 回講義メモ (訂正版)

2010 年 12 月 14 日

§ 4.3 自己相関のある攪乱項 (続)

AR(p) モデル

$$\epsilon_t = \phi_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \phi_p \epsilon_{t-p} + \xi_t$$

に一般化すると、AR(p) モデルが共分散定常であるための必要十分条件は

$$1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p = 0 \quad (4.3.4)$$

の根が $|L| > 1$ であることである。

次に、MA(q) モデル

$$\epsilon_t = \xi_t + \theta_1 \xi_{t-1} + \cdots + \theta_q \xi_{t-q}$$

3

の性質を見ることにしよう。期待値をとると、

$$E(\epsilon_t) = E(\xi_t) + \theta_1 E(\xi_{t-1}) + \cdots + \theta_q E(\xi_{t-q}) = 0$$

となり、分散は

$$\text{Var}(\epsilon_t) = (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2) \eta^2$$

であるので、時点 t に関わらず一定である。

自己共分散については、

$$\text{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_{t-1}) = (\theta_1 + \theta_1 \theta_2 + \cdots + \theta_{q-1} \theta_q) \eta^2$$

$$\text{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_{t-2}) = (\theta_2 + \theta_1 \theta_3 + \cdots + \theta_{q-2} \theta_q) \eta^2$$

$$\vdots$$

$$\text{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_{t-q}) = \theta_q \eta^2$$

$$\text{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_{t-r}) = 0 \quad \text{for } r > q$$

4

という関係が成立する。これより、 q が有限の値をとるときには、MA(q) モデルは常に共分散定常である。

攪乱項が AR(1) 過程に従う場合の GLS

攪乱項 ϵ_t が AR(1) 過程

$$\epsilon_t = \phi_1 \epsilon_{t-1} + \xi_t, \quad \xi_t \sim iid(0, \eta^2)$$

に従う場合、攪乱項ベクトル ϵ の分散共分散行列は

$$E(\epsilon \epsilon') = \frac{\eta^2}{1 - \phi_1^2} \begin{pmatrix} 1 & \phi_1 & \phi_1^2 & \cdots & \phi_1^{n-1} \\ \phi_1 & 1 & \phi_1 & \cdots & \phi_1^{n-2} \\ \phi_1^2 & \phi_1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{n-1} & \cdots & \cdots & \phi_1 & 1 \end{pmatrix} = \eta^2 \Omega$$

5

になる。このとき、 Ω^{-1} は

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\phi_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\phi_1 & 1 + \phi_1^2 & -\phi_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\phi_1 & 1 + \phi_1^2 & -\phi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\phi_1 & 1 + \phi_1^2 & -\phi_1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\phi_1 & 1 + \phi_1^2 & -\phi_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\phi_1 & 1 \end{pmatrix}$$

という形をしている。

Ω^{-1} を上三角行列 R を用いて $\Omega^{-1} = R'R$ と分解 (Cholesky 分解)

6

すると、

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \phi_1^2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\phi_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\phi_1 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\phi_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.3.5)$$

となる。

したがって、線形回帰モデル $y = X\beta + \epsilon$ の左側から R をかけた

$$Ry = RX\beta + R\epsilon$$

を OLS 推定すると、

$$\begin{aligned} \tilde{b} &= (X'R'RX)^{-1} X'R' Ry \\ &= (X'\Omega^{-1}X)^{-1} X'\Omega^{-1}y = b_{GLS} \end{aligned}$$

7

のように、GLS 推定量に一致する。この $\mathbf{R}$ 行列による変数の変換のことを Prais=Winsten 変換と呼ぶ。

(例) 単回帰モデルの場合

単回帰モデル

$$\begin{cases} y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \epsilon_t \\ \epsilon_t = \phi_1 \epsilon_{t-1} + \xi_t, \quad \xi_t \sim iid(0, \eta^2) \end{cases} \quad t = 1, \dots, n$$

のとき、Prais=Winsten 変換は

$$\begin{aligned} y_1^* &= \sqrt{1 - \phi_1^2} y_1, \quad x_1^* = \sqrt{1 - \phi_1^2} x_1, \quad z_1^* = \sqrt{1 - \phi_1^2} \\ y_t^* &= y_t - \phi_1 y_{t-1}, \quad x_t^* = x_t - \phi_1 x_{t-1}, \quad z_t^* = 1 - \phi_1 \quad \text{for } t = 2, \dots, n \end{aligned}$$

という変数変換を行って

$$y_t^* = \beta_1 z_t^* + \beta_2 x_t^* + \epsilon_t^*, \quad t = 1, \dots, n$$

8

というモデルに変換していることに相当する。なお、ここで

$$\epsilon_t^* = \begin{cases} \sqrt{1 - \phi_1^2} \epsilon_1 & t = 1 \\ \epsilon_t - \phi_1 \epsilon_{t-1} & t = 2, \dots, n \end{cases}$$

であり、 $\epsilon_1 \sim id(0, \eta^2/(1 - \phi_1^2))$ と仮定していることに注意。

これを見てわかるように、最初の観測値だけ異なるのは面倒なので、データから (y_1^*, x_1^*) を落としたものが、Cochrane-Orcutt 変換である。

実際には ϕ_1 は未知であるので、まず OLS 残差 e_t , ($t = 1, \dots, n$) をもとめ、

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\sum_{t=2}^n e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^n e_{t-1}^2}$$

として推定した $\hat{\phi}_1$ を用いる。

9

系列相関の検定

系列相関の検定としては、連の検定 (runs test) など様々なものが提案されているが、AR(1) 過程の場合、Durbin=Watson 検定がよく用いられる。

Durbin=Watson 検定統計量は以下で与えられる。

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2} = 2 - 2\hat{\phi}_1 - \frac{e_n^2 + e_1^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2} \rightarrow 2(1 - \phi_1) \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

残念ながら d の分布は $\mathbf{X}$ に依存するため、その極限分布 (上限分布お

10

よび下限分布) が数表として与えられている。(定数項がない回帰モデルの場合にはテキスト等で与えられているものとは別な数表を用いるので注意)。

ただ、 $|\phi_1| < 1$ のとき、 $n \rightarrow \infty$ であれば、

$$\sqrt{n}(\hat{\phi}_1 - \phi_1) \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

となるので、十分大きな n については

$$d \xrightarrow{d} N\left(2, \frac{4}{n}\right)$$

が成立する (von Neyman ratio)。