

2010年度 学部 エコノメトリックス 授業資料(第24回:訂正4版)

2

2010 年度 学部 エコノメトリックス
第 24 回講義メモ
(訂正 4 版)

2011 年 1 月 12 日
2011 年 1 月 18 日, 25 日 (訂正)
2011 年 1 月 26 日 (訂正)

§ 5 操作変数法

§ 5.1 問題の所在

線形回帰モデル

$$y_t = \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta} + \epsilon_t \quad t = 1, \dots, n$$

における攪乱項 $\{\epsilon_t\}$ の仮定

$$E(\epsilon_t | \mathbf{X}) = 0$$

が満たされないケース、すなわち $E(\epsilon_t | \mathbf{X}) \neq 0$ のとき何が起きるかを考えよう。

$$E(\mathbf{x}_t \epsilon_t) \neq \mathbf{0} \quad i.e. \quad \text{Cov}(\epsilon_t, x_{jt}) \neq 0 \quad \exists j$$

3

であるから、 $\boldsymbol{\beta}$ の OLS 推定量である $\mathbf{b}_n$ は

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{b}_n = \boldsymbol{\beta} + \underbrace{\left[\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbf{X}' \mathbf{X} \right]^{-1}}_{=const} \underbrace{\left[\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbf{X}' \boldsymbol{\epsilon} \right]}_{=nonzero} \neq \boldsymbol{\beta}$$

となるので、OLS 推定量は一致性をもたず (inconsistent)、かつ偏りがある (biased) 推定量である。

では、 $E(\epsilon_t | \mathbf{X}) = 0$ となるケースにはどのようなものがあるだろうか。

1) Errors in Variable

真のモデル (true model) が

$$y_t^0 = \beta_1 + \beta_2 x_t^0 + \epsilon_t^0 \quad \epsilon_t^0 \sim iid(0, \sigma^2)$$

4

であるが、 y_t^0 、 x_t^0 が観測可能でない (unobservable) ケースを考えよう。

我々が観測可能なのは

$$\begin{array}{lcl} y_t = y_t^0 + v_{2t} & \nearrow & \text{noise} \\ x_t = x_t^0 + v_{1t} & \searrow & \end{array}$$

のようにノイズが加わった (y_t, x_t) であるとする。このとき、 y_t を x_t に回帰した式は、

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \underbrace{\epsilon_t^0 + v_{2t} - \beta_1 v_{1t}}_{=\epsilon_t}$$

となるので、

$$\begin{aligned} E(\epsilon_t | x_t) &= E(\epsilon_t^0 + v_{2t} - \beta_1 v_{1t} | x_t^0 + v_{1t}) \\ &= -\beta_1 v_{1t} \neq 0 \end{aligned}$$

という結果が得られる。

5

2) Simultaneous equations

価格 p_t と数量 q_t が、

$$\text{需要関数 } q_t = \gamma_d p_t + \mathbf{X}_t^d \boldsymbol{\beta}_d + \epsilon_t^d$$

$$\text{供給関数 } q_t = \gamma_s p_t + \mathbf{X}_t^s \boldsymbol{\beta}_s + \epsilon_t^s$$

の 2 本の方程式で決定される (同時方程式) モデルを考えよう。行列表現では

$$\begin{pmatrix} 1 & -\gamma_d \\ 1 & -\gamma_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_t \\ p_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_t^d \boldsymbol{\beta}_d \\ \mathbf{X}_t^s \boldsymbol{\beta}_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_t^d \\ \epsilon_t^s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} q_t \\ p_t \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma_d - \gamma_s} \begin{pmatrix} -\gamma_s & \gamma_d \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_t^d \boldsymbol{\beta}_d + \epsilon_t^d \\ \mathbf{X}_t^s \boldsymbol{\beta}_s + \epsilon_t^s \end{pmatrix}$$

6

となるから、内生変数 p_t に ϵ_t^d 、 ϵ_t^s の両方が含まれていることは明らかである。したがって、

$$\begin{cases} E(\epsilon_t^d | p_t) \neq 0 \\ E(\epsilon_t^s | p_t) \neq 0 \end{cases}$$

となる。このような、同時方程式体系で生じる OLS 推定量の偏り (bias) のことを同時方程式バイアスと呼んでいる

2010年度 学部 エコノメトリックス 授業資料(第24回:訂正4版)

7

§ 5.2 操作変数法推定量

基本ケース:操作変数の個数がパラメータ数と等しい場合

いま、 $E(\epsilon_t | \mathbf{w}_t) = 0$ を満たす $k \times 1$ のベクトル $\mathbf{w}_t$ が存在するものとする。

$$E(\epsilon_t | \Omega_t) = 0$$

$$\mathbf{w}_t \subset \Omega_t, \quad \Omega_t : \text{情報集合 (information set)}$$

このとき、 $E(\mathbf{w}_t \epsilon_t) = \mathbf{0}$ が成り立つ。上式の期待値を標本モーメントでおきかえて MME(モーメント法推定量) を求める。

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{w}_t \epsilon_t = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{w}_t (y_t - \mathbf{x}_t' \beta) = \mathbf{0}$$

8

$$\mathbf{b}_{MM} = \left(\sum_{t=1}^n \mathbf{w}_t \mathbf{x}_t' \right)^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbf{w}_t y_t$$

このとき必要な条件は、

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{w}_t \mathbf{x}_t' < +\infty$$

すなわち特異行列にならないことである。 $\underbrace{\mathbf{W}}_{n \times k} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1' \\ \vdots \\ \mathbf{w}_n' \end{pmatrix}$ とすると、操

作変数法推定量 $\mathbf{b}_{IV}$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{IV} &= (\mathbf{W}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{W}' \mathbf{y} \\ &= \beta + (\mathbf{W}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{W}' \epsilon \end{aligned}$$

9

で与えられ、その分散共分散は

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{b}_{IV}) &= \sigma^2 (\mathbf{W}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{W}' \mathbf{W} (\mathbf{X}' \mathbf{W})^{-1} \\ &= \sigma^2 (\mathbf{X}' \mathbf{W} (\mathbf{W}' \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}' \mathbf{X})^{-1} \\ &= \sigma^2 (\mathbf{X}' \mathbf{P}_{\mathbf{W}} \mathbf{X})^{-1} \end{aligned}$$

になる。

一般ケース

次に操作変数 $\mathbf{w}_t$ が $l \times 1$ であるケースを考えよう。
 k と l の関係をみると、

$$\begin{aligned} k < l & \quad \text{over identification} \quad \odot \\ k = l & \quad \text{just identification} \quad \odot \\ k > l & \quad \text{under identification} \quad \times \end{aligned}$$

10

であるので、ここでは $k < l$ の場合を考える。

このとき、操作変数 $\mathbf{W} : n \times l$ 、説明変数 $\mathbf{X} : n \times k$ 、に加えて $\mathbf{J} : l \times k$ という行列を用い、 $\mathbf{WJ} : n \times k$ を新たな操作変数として使用する。
この $\mathbf{J}$ は次の要件を満たす必要がある。

- (1) $\text{rank}(\mathbf{J}) = k$
- (2) $\mathbf{J}$ は asymptotically deterministic
- (3) $\mathbf{J} = \text{argmin Var}(\mathbf{b}_{IV})$

$\mathbf{J} \approx (\mathbf{W}' \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}' \mathbf{X}$ と考えられるが、これは $\hat{\mathbf{X}}_j = \mathbf{W} \beta_j + \epsilon_j$ の OLS 推定量である $\mathbf{b}_j$ と同等。このとき、

$$\mathbf{WJ} = \mathbf{W} (\mathbf{W}' \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}' \mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}}$$

11

になる。この場合の操作変数推定量 $\mathbf{b}_{GIV}$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{GIV} &= ((\mathbf{WJ})' \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{WJ})' \mathbf{y} \\ &= (\mathbf{X}' \mathbf{P}_{\mathbf{W}} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{P}_{\mathbf{W}} \mathbf{y} \\ &= \beta + (\mathbf{X}' \mathbf{P}_{\mathbf{W}} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{P}_{\mathbf{W}} \epsilon \end{aligned}$$

で与えられ、その分散共分散は

$$\text{Var}(\mathbf{b}_{GIV}) = \sigma^2 (\mathbf{X}' \mathbf{P}_{\mathbf{W}} \mathbf{X})^{-1}$$

になる。