

2

2010 年度 学部 エコノメトリックス
第 25 回講義メモ
(訂正 2 版)2011 年 1 月 18 日
2011 年 1 月 26 日 (訂正)

§ 5.3 2段階最小2乗法

さて、同時方程式モデルに戻ることにしよう。同時方程式モデル中の一つの式が推定可能となるためには、パラメータ（係数）が識別されなければならない。

同時方程式モデルにおける内生変数の数全体を j 、外生変数（先決変数）の数全体を ℓ としよう。また、モデル中のある式 (i 番目の式) に含まれる内生変数の数を j_1 、外生変数の数を ℓ_1 とする。

証明は省くが、このときこの式が識別されるための必要条件 (次数条件: order condition) は、

$$\ell - \ell_1 \geq j_1 - 1$$

である。すなわち、問題としている式に含まれない外生変数の数は、その

3

式に含まれている内生変数の数から 1 を引いたもの以上であることである。言い換えれば、その式に含まれている内生変数の数は、含まれない外生変数の数に 1 を加えたもの以下であることである。

次数条件から、

$$\ell - \ell_1 > j_1 - 1 \quad \text{over identified: 過剰識別}$$

$$\ell - \ell_1 = j_1 - 1 \quad \text{just identified: 丁度識別}$$

$$\ell - \ell_1 < j_1 - 1 \quad \text{not identified: 識別不能}$$

と呼んでいる。

同時方程式モデル中の一つの式が**識別可能**であるときに、操作変数 $\mathbf{W}$ として同時方程式内の（全ての）外生変数を用いる操作変数法 (IV) が、2段階最小2乗法 (Two Stage Least Squares: 2SLS) である。したがって、2SLS は操作変数法の特例ケースに相当する。

4

(注意) $\hat{\sigma}^2$ の推定に注意

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b}_{IV}\|^2}{n} \quad \text{consistent estimator}$$

(Note) 3段階最小2乗法

同時方程式モデル中の各式がすべて識別可能であるとき、まず各式に 2SLS を適用して得られた残差から、攪乱項の分散共分散行列の推定量を計算する。次に、一般化最小2乗法によって同時方程式モデル中の未知パラメータを同時推定するのが 3段階最小2乗法である。

5

§ 5.4 IVE の小標本特性

操作変数法推定量 (IVE) の小標本 (サンプルサイズ n が小さい時) 特性として次のものが指摘されている。

- many instrument 問題
 n に対し l が比較的大きい場合
→ IVE に偏り (bias) が残ったまま
- weak instrument 問題
 $\mathbf{X}$ のうち $\mathbf{W}$ によって説明できる部分が過小
→ IVE の分散共分散行列を正しく評価していない可能性

6

IV は理論的には理想的なものであるが、操作変数 $\mathbf{W}$ に何を選ぶか、またその数 l はいくつがいいか、など、実際に推定するに当たっては様々な問題があることも事実である。

§ 5.5 仮説検定

(1) 過剰識別性の検定 (test of over-identification)

操作変数行列 $\mathbf{W}$: $n \times l$ を考えると、 $l > k$ のとき、 $l - k$ は過剰識別の程度を表している。

$$\begin{array}{ll} \mathbf{W} \rightarrow & \mathbf{W}\mathbf{J} : k \text{ 次元} \\ & \searrow \mathbf{W}^* \quad \text{extra instrument} \end{array}$$

7

このとき、過剰識別制約は

$$E(\mathbf{W}^{*'}\boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{w}_t^* e_t = \mathbf{0}$$

で表される。ここで $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_t, \dots, e_n)'$ は $\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b}_{IV}$ であり、 $\mathbf{w}_t^{*'}
\mathbf{W}^*$ の第 t 行ベクトルである。

証明は省くが、過剰識別制約の検定 (Sargan 検定) は、

$$\mathbf{e} = \mathbf{W}\mathbf{b} + \text{residual}$$

の OLS 推定で得られる R^2 を用いると、過剰識別がないという帰無仮説の下では

$$nR^2 \rightarrow \chi^2(\ell - k)$$

となるので、これを用いて検定を行うことができる。

8

(2) Durbin=Wu=Hausman 検定

先験的信息なしに操作変数法 (IV) を使う必要の有無を検定するものである。

$$\begin{aligned} H_0 &: \mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} & \boldsymbol{\epsilon} &\sim NID(0, \sigma^2) & E(\mathbf{X}'\boldsymbol{\epsilon}) &= \mathbf{0} \\ H_1 &: \mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} & \boldsymbol{\epsilon} &\sim NID(0, \sigma^2) & E(\mathbf{W}'\boldsymbol{\epsilon}) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

という二つの仮説 (モデル) を考えると、

H_0 が真のとき、 $\mathbf{b}_{OLS}$ も $\mathbf{b}_{IV}$ も consistent

H_1 が真のとき、 $\mathbf{b}_{OLS}$ は inconsistent, $\mathbf{b}_{IV}$ は consistent

となるので、この性質を用いると H_0 の下では

$$\mathbf{b}_{IV} - \mathbf{b}_{OLS} \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

9

が成立する。ところで、

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{IV} - \mathbf{b}_{OLS} &= (\mathbf{X}'\mathbf{P}_W\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{P}_W\mathbf{y} - (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{P}_W\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{P}_W\mathbf{M}_X\mathbf{y} \end{aligned}$$

となるので、

$$\frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{P}_W\mathbf{M}_X\mathbf{y} = \frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{P}_W\mathbf{M}_X\boldsymbol{\epsilon} \rightarrow \mathbf{0}$$

を確かめればよいことになる。

H_0 のとき $\frac{1}{n}\mathbf{M}_X\boldsymbol{\epsilon} \rightarrow \mathbf{0}$ は明らか。検定方法としては、Hausman 検定

$$(\mathbf{b}_{IV} - \mathbf{b}_{OLS})'[\text{Var}(\mathbf{b}_{IV}) - \text{Var}(\mathbf{b}_{OLS})]^{-1}(\mathbf{b}_{IV} - \mathbf{b}_{OLS}) \rightarrow \chi^2(k^*)$$

を用いる。ここで k^* は説明変数 $\mathbf{X}$ のうち、操作変数 $\mathbf{W}$ に含まれない変数の数を表している。