2011年度 エコノメトリックスI & 上級エコノメトリックスI
第11回宿題(2011年7月15日出題)
(訂正版)

注意事項

提出期限: 7月22日（金）3時限終了時
必ずA4サイズの紙で提出のこと。（サイズが異なるものは受け付けない）

問1

独立な確率変数列 Y_t $(t = 1, \ldots, n)$ は

$$\mathrm{E}(Y_t) = \mu, \quad \mathrm{Var}(Y_t) = \sigma_t^2 < \infty$$

を満たし、さらに、

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \sigma_t^2 = c < \infty$$

であるものとする。このとき、期待値に関する不等式を用いて

$$\bar{Y}_n \equiv \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} Y_t \xrightarrow{P} \mu \quad \text{as } n \to \infty$$

となる、すなわち $\bar{Y}_n/n$ が μ に確率収束することを証明しなさい。

問2

S_n を二項分布 $Bin(n, p)$ にしたがう確率変数列とする。このとき、次の問に答えなさい。

(1) $\dfrac{S_n}{n}$ が p に確率収束する、すなわち $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$ となることを特性関数を用いて示しなさい。
（ヒント：$e^{i\theta}$ を Taylor 展開することを考えなさい。）

(2) 基準化した S_n/n が標準正規分布に分布収束する、すなわち

$$\frac{\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - p\right)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

となることを、特性関数を用いて示しなさい。