2011年度 エコノメトリックスI & 上級エコノメトリックスI
第2回講義メモ（訂正版）

2011年4月22日

§1. 集合論の基礎

確率…「事象」（event）の起こりやすさの尺度
P：事象$\omega \longrightarrow [0,1]$　という関数（確率測度: probability measure）

「事象」　集合論の中で扱う

特徴1 集合の集合“族”　family / class / fieled of sets の導入

特徴2 集合列　seq of sets と極限の導入

§1.1 集合の基本概念

要素（element）の集まりを集合（set）という。
　　要素 ω が集合 A に含まれることを　$\omega \in A$
　　要素 ω が集合 A に含まれないことを　$\omega \notin A$
で表す。集合 A に含まれる要素数が有限のとき有限集合 (finite set)、無限のとき無限集合 (infinite set) という。また要素に番号付けができるとき、可算集合（countable set）という。

集合 A、B があるとき

$$\omega \in A \quad \Rightarrow \quad \omega \in B$$

であるなら、A を B の**部分集合** (subset) と呼び、$A \subset B$ で表す。
$A \subset B$ かつ $A \supset B$ のとき、A と B は等しくなる、すなわち $A = B$ となる。

次に特殊な集合を定義しよう。

空集合 empty set 1つも要素を含まない集合。$\emptyset$ で表す。（ギリシャ文字の ϕ ではないことに注意）

全集合 universal set 考察の対象となる集合。Ω で表す。

和、積、差

集合 A と B について、和、積、差を定義しよう。

積集合 (intersection)

$$A \cap B \equiv \{\omega \colon \omega \in A \text{ かつ} \omega \in B\}$$

$$A \cap B = \emptyset \text{ のとき、} A \text{ と } B \text{ は排反（disjoint）}$$

和集合 (union)

$$A \cup B \equiv \{\omega \colon \omega \in A \text{ または} \omega \in B\}$$

差集合 (difference)

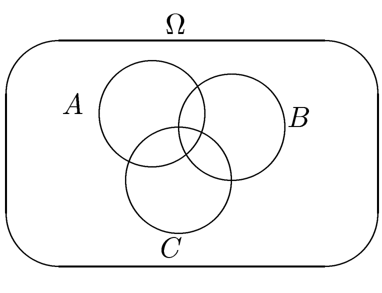
$$\begin{aligned} A \setminus B &\equiv \{\omega \colon \omega \in A \text{ かつ} \omega \notin B\} \\ &= A \cap B^C \end{aligned}$$

補集合 (compliment)

$$\begin{aligned} A^C &\equiv \{\omega \colon \omega \notin A \text{ かつ} \omega \in \Omega\} \\ &= \Omega \setminus A \end{aligned}$$

定理 1.1.1 基本公式（テキスト p.224 定理 A1）

$$\begin{array}{llcl} \text{結合律} & A \cap (B \cap C) & = & (A \cap B) \cap C \\ & A \cup (B \cup C) & = & (A \cup B) \cup C \\ \text{分配律} & A \cup (B \cap C) & = & (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ & A \cap (B \cup C) & = & (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{array}$$



定理 1.1.2 ド・モルガンの法則（テキスト p.225 定理 A2）

$$\begin{aligned} (A \cup B)^C &= A^C \cap B^C \\ (A \cap B)^C &= A^C \cup B^C \end{aligned}$$

§1.2 集合列（seq of sets）

$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$　集合列（$n = \infty$ でも可）

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

$A_i \cap A_j = \emptyset$　　${}^{\forall} i \neq j$ のとき

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

定理 1.2.1 （テキスト p.225 系 A2）

$$\Bigl(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Bigr)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$$
$$\Bigl(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Bigr)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$$

極限

次に集合列の極限を定義しよう。

$$\limsup_n A_n \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i) \qquad \text{上極限}$$
$$\liminf_n A_n \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i) \qquad \text{下極限}$$

集合列の上極限と下極限が一致するとき、集合列の極限が存在する。すなわち、

$$\lim_n A_n = \limsup_n A_n = \liminf_n A_n$$

である。

$$\left.\begin{array}{ll} \text{増加列} & A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots \\ \text{減少列} & A_1 \supset A_2 \supset \cdots \end{array}\right\} \text{単調列} \quad \text{monotone seq}$$

定理 1.2.2（テキスト p.227 定理 A4）

単調列の極限

$$(1) \quad \lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \text{if increase seq}$$
$$(2) \quad \lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \text{if decreasing seq}$$

§1.3 集合族（family class）

次に集合を要素とする集合を考えよう。$\emptyset$ を含む Ω の部分集合全体を 2^{Ω} で表すことにしよう。2^{Ω} の部分集合 $\mathcal{F}$、すなわち $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ について集合族という概念を導入する。

定義 1.3.1

空集合でない集合 Ω の部分集合からなる集まり $\mathcal{F}$ が次の性質をもつとき、$\mathcal{F}$ を集合族と呼ぶ。

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \Omega \in \mathcal{F} & & \\ (2) & A \in \mathcal{F} & \Rightarrow & A^C = \Omega \setminus A \in \mathcal{F} \\ (3) & A, B \in \mathcal{F} & \Rightarrow & A \cup B \in \mathcal{F} \end{array}$$

Note

(3) は、$n < \infty$ について

$$(3)' \quad A_i \in \mathcal{F} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F} \qquad \text{有限加法性}$$

と拡張できる。

定義 1.3.2

(1), (2) に加えて

$$(4) \quad A_i \in \mathcal{F} \quad (i = 1, 2, \ldots) \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F} \qquad \text{完全加法性}$$

が成立するとき、$\mathcal{F}$ を σ-集合族 (σ-field) と呼ぶ。

定理 1.3.3

完全加法性が成立するならば、有限加法性も成立する。

Note: Borel 集合

例：$\Omega = \boldsymbol{R}$ として、$\{(a, b]; a < b,\ a, b \in \boldsymbol{R}\}$ からなる σ-集合族を (Euclidean)Borel σ-集合族という。

§2. 確率と確率空間

§2.1 集合族と測度

定義 2.1.1　測度

$\mathcal{A}$ を Ω の部分集合からなる集合族（←有限加法性）であるとする。
$\mu : A \in \mathcal{A} \to [0, \infty]$ という関数が、$A \cap B = \emptyset$ 、 $A, B \in \mathcal{A}$ に関して

$$\mu(A+B) = \mu(A) + \mu(B)$$

が成立するとき、μ を有限加法測度であるという。

$$\begin{array}{rll} \mu(\Omega) < \infty & \text{のとき} & \mu\text{は有界} \\ \mu(\Omega) = 1 & \text{のとき} & \mu\text{を確率測度といい、}P(\cdot)\text{ で表す。} \end{array}$$

実は、確率測度を考えるとき、集合族 $\mathcal{A}$ は σ-集合族でなくてはならない。

定義 2.1.2　確率測度

$\mathcal{B}$ を Ω の部分集合からなる σ-集合族であるとする。
関数 P：$A \in \mathcal{B} \to [0, 1]$ が以下を満たすとき、P を確率（測度）という。

$$\begin{array}{ll} (1) & P(A) \geq 0 \\ (2) & P(\Omega) = 1 \\ (3) & A_i\ ,\ A_j \in \mathcal{B} \qquad A_i \cap A_j = \emptyset \qquad i \neq j \end{array}$$

に対して

$$P\{\sum_{i=1}^{\infty} A_i\} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \qquad \text{(完全加法性)}$$

定義 2.1.3　確率空間（"Triple"）

標本空間 Ω、Ω の部分集合からなる（最小の）σ-集合族、その上に定義される確率測度の組を確率空間と呼び、$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ で表す。

定理 2.1.4

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を確率空間とする。　$(i = 1, \cdots, \infty)$
$A,\ B,\ C_i,\ D_i \in \mathcal{B}$ について、以下が成立する。

(a)　$P(\emptyset) = 0$

(b)　$P(\sum_{i=1}^{n} C_i) = \sum_{i=1}^{n} P(C_i)$　有限加法性　$C_i \cap C_j = \emptyset\ ,\quad i \neq j$

(c)　$P(A^C) = 1 - P(A)$

(d)　$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

(e)　$P(A) \leq 1$

(f)　$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$　加法定理

(g)　$D_n \subset D_{n+1} \quad n = 1, 2, \cdots \ \Rightarrow\ P(D_n) \uparrow P(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n)$

(h)　$D_n \supset D_{n+1} \quad n = 1, 2, \cdots \ \Rightarrow\ P(D_n) \downarrow P(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n)$

(i)　$P(\bigcup_{i=1}^{n} D_n) \leq \sum_{i=1}^{n} P(D_n)$　　$n = 1, 2, \cdots, \infty$

(j)　D_nが単調であれば　$\lim P(D_n) = P \lim (D_n)$