

計量経済基礎 第6回講義 宿題

2014年5月26日

提出期限

第7回講義(2014年6月2日)授業終了時。A4サイズの内紙を用いること。

Q1

線形単回帰モデル

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2,i} + \epsilon_i, \quad (i = 1, \dots, 4)$$

を考えることにしよう。 $\epsilon_i \sim IID(0, \sigma^2)$ とし、 (Y_i, X_i) が下表で与えられるとき、次の問いに答えなさい。

i	1	2	3	4
Y_i	3	10	14	8
$X_{2,i}$	12	8	5	9

(1) $\mathbf{y} = (Y_1 \ Y_2 \ Y_3 \ Y_4)'$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1 \ \beta_2)'$, $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_3 \ \epsilon_4)'$ として上の線形単回帰モデルを行列、ベクトルを用いて

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

で表すとき、 \mathbf{X} はどのような行列になるか。全ての要素を示して答えなさい。

- (2) $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ とその逆行列 $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ を計算して求めなさい。
- (3) $\boldsymbol{\beta}$ の OLS 推定量 $\mathbf{b} = (b_1 \ b_2)'$ を計算して求めなさい。
- (4) $\sigma^2 = 0.16$ であるとき、 $\text{Var}(b_2)$ を計算して求めなさい。
- (5) $\sigma^2 = 0.16$ であるとき、 $\text{Cov}(b_1, b_2)$ を計算して求めなさい。
- (6) σ^2 が未知のとき、その不偏推定量から値を求めなさい。

Q2

線形回帰モデル

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad \boldsymbol{\epsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$$

を考える。ここで、 \mathbf{y} , $\boldsymbol{\epsilon}$ は $n \times 1$ ベクトル、 $\boldsymbol{\beta}$ は $k \times 1$ ベクトル、 \mathbf{X} は $n \times k$ 行列とする。

このとき、 $\boldsymbol{\beta}$ の線形推定量 \mathbf{b}^* が、任意の $k \times n$ 行列 \mathbf{Z} を用いて

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{Z}\mathbf{y}$$

と表現できることを使って、 $\boldsymbol{\beta}$ の OLS 推定量 $\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ が最良線形不偏推定量 (BLUE: Best Linear Unbiased Estimator) であることを証明しなさい。(Gauss=Markov Theorem の証明)

ヒント \mathbf{D} という行列を用いて $\mathbf{Z} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{D}$ と表してみよう。