

計量経済学 (講義ノート 99年度作成)

谷崎 久志
神戸大学・経済学部

目次

1	計量経済学について	1	5	統計学の回帰分析への応用	19
1.1	例 1: マクロの消費関数	1	5.1	回帰モデルの仮定	20
1.2	例 2: 日本酒の需要関数	1	5.2	誤差項 (攪乱項) の経済学的意味	20
2	準備: 和記号 \sum について	2	5.3	$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ の統計的性質	21
2.1	重要な公式・性質	2	5.3.1	$\hat{\beta}$ について	21
3	最小二乗法について	2	5.3.2	$\hat{\alpha}$ について	21
3.1	最小二乗法と回帰直線	3	5.3.3	$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ の平均	21
3.2	切片 α と傾き β の推定	3	5.3.4	$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ の分散	22
3.3	残差 \hat{u}_i の性質について	4	5.3.5	$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ の分布 (σ^2 が既知の場合)	24
3.4	決定係数 R^2 について	5	5.3.6	$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ の性質: 最良線型不偏性と一 致性	25
3.5	まとめ	6	5.4	誤差項 (または, 攪乱項) u_i の分散 σ^2 に ついて	27
4	統計学の復習	6	5.4.1	$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ の分散の不偏推定量	30
4.1	連続型確率変数	6	5.5	$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ の分布	30
4.2	多変数確率変数	7	5.5.1	統計学の復習 (t 分布)	30
4.3	$f(x)$ の関数型, 密度関数の種類	8	5.5.2	$\hat{\beta}$ について:	31
4.4	統計的推測	9	5.5.3	$\hat{\alpha}$ について:	31
4.4.1	統計量, 推定量, 推定値	14	5.5.4	自由度が $n - 2$ の直感的な理由:	32
4.4.2	推定量の望ましい性質	14	5.5.5	まとめ:	32
4.4.3	標本平均 \bar{X} の分布	16	5.6	α, β の区間推定 (信頼区間)	32
4.4.4	\bar{X} と $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ の独立性と分布	17	5.6.1	統計学の復習: 区間推定 (信頼区間)	32
4.4.5	区間推定 (信頼区間)	18	5.6.2	α, β の区間推定 (信頼区間)	32
4.4.6	仮説検定	19	5.7	α, β の仮説検定	33
			5.7.1	統計学の復習: 仮説検定	33
			5.7.2	α, β の仮説検定	34
			5.7.3	t 値について	34

5.8	予測	36
5.8.1	予測量の期待値と分散	36
5.8.2	予測の区間推定	37
6	係数推定値の分散と正規方程式との関係	37
7	多重回帰	38
7.1	推定量の性質	39
7.2	多重共線性について	41
7.3	ダミー変数について	42
7.3.1	異常値	42
7.3.2	構造変化	43
8	関数型について	43
9	ラグ変数について	45
9.1	分布ラグ	45
9.2	部分調整モデル	45
10	F 検定について	46
10.1	いくつかの例	46
10.2	検定の方法	46
11	系列相関： DW について	47
11.1	DW について	47
11.2	系列相関のもとで回帰式の推定	48
11.3	遅れのある変数 (再考)	51
12	不均一分散 (不等分散)	51
13	応用例	52
13.1	マクロの消費関数	52

教科書

『計量経済学』(山本拓著, 1995, 新世社)

1 計量経済学について

- 経済理論(ミクロ, マクロ, 財政, 金融, 国際経済, ...)
- データ (GNP, 消費, 投資, 金利, 為替レート, ...)

計量経済学 \implies 経済理論が現実に成り立つものかどうかを, データを用いて, 統計的に検証する。

1.1 例 1: マクロの消費関数

$$C = f(Y)$$

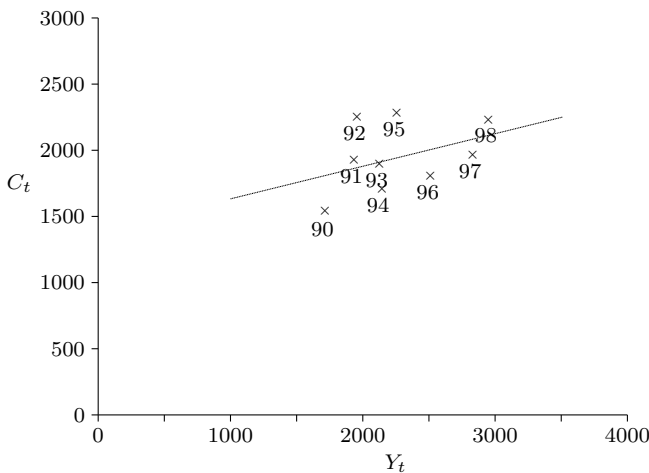
ただし, C は消費, Y は所得。

1. $Y \nearrow \implies C \nearrow$
2. $\frac{dC}{dY}$ = 限界消費性向 = 所得 1 円増加で消費が何円増加するか
3. すなわち, $\frac{dC}{dY} > 0$

モデルの定式化

1. $C = a + bY$
2. $b = \frac{dC}{dY}$ = 限界消費性向
3. a = 基礎消費 ($Y = 0$ のときに必要な消費)
4. 符号条件: $a > 0, b > 0$ (しかも, $1 > b$)

図 1: 消費 (C_t) と所得 (Y_t)



1. $x \implies$ 実際のデータ

2. $(Y_t, C_t) \implies t$ 期のデータ, i.e., $t = 1, 2, \dots, 9$

3. $t = 1 \implies$ 1990 年,

$t = 2 \implies$ 1991 年,

...

$t = 9 \implies$ 1998 年,

1. 実際のデータを用いて, a, b を求める。
2. a, b を求める \equiv 現実の経済構造を求める
3. その結果, もし $a > 0, 1 > b > 0$ なら, 経済理論は現実経済を説明していると言える。

1.2 例 2: 日本酒の需要関数

$$Q = f(Y, P_1, P_2)$$

ただし, Q は日本酒の需要量, Y は所得, P_1 は日本酒の価格, P_2 は洋酒の価格。

1. $Y \nearrow \implies Q \nearrow$,
 $P_1 \nearrow \implies Q \searrow$,
 $P_2 \nearrow \implies Q \nearrow$
2. $\frac{\partial Q}{\partial Y} > 0, \frac{\partial Q}{\partial P_1} < 0, \frac{\partial Q}{\partial P_2} > 0$
3. 日本酒と洋酒は代替財
4. モデルの定式化 (A)

$$Q = a + b_1Y + b_2P_1 + b_3P_2$$

5. Q, Y, P_1, P_2 を用いて, a, b_1, b_2, b_3 を求める (日本酒の需要構造を求める)。
6. 符号条件: $b_1 > 0, b_2 < 0, b_3 > 0, a > 0$?
7. t 期のデータ (Q_t, Y_t, P_{1t}, P_{2t})
8. T 組のデータ, i.e., $t = 1, 2, \dots, T$
9. モデルの定式化 (B)

$$Q = a + b_1Y + b_2\frac{P_1}{P_2}$$

符号条件: $b_1 > 0, b_2 < 0$

10. モデルの定式化 (C)

$$\log(Q) = a + b_1 \log(Y) + b_2 \log\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$

符号条件： $b_1 > 0, b_2 < 0$

11. モデル (A), (B), (C) のどれが最も現実的かを得られた結果から判断する。

$$3. \sum_{i=1}^n X_i Y_i = 1 \times 2 + 3 \times 1 + (-3) \times 2 + 2 \times (-1) = -3$$

$$4. \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i) = (1+2) + (3+1) + (-3+2) + (2-1) = 7$$

$$5. \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i)^2 = (1+2)^2 + (3+1)^2 + (-3+2)^2 + (2-1)^2 = 27$$

2 準備：和記号 Σ について

データとして, X_1, X_2, \dots, X_n と Y_1, Y_2, \dots, Y_n のを考える。

$$1. \sum_{i=1}^n X_i = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$2. \sum_{i=1}^n X_i^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$$

$$3. \sum_{i=1}^n X_i Y_i = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \dots + X_n Y_n$$

4. 定数 c について,

$$\sum_{i=1}^n c = c + c + \dots + c = nc$$

$$5. \sum_{i=1}^n c X_i = c \sum_{i=1}^n X_i$$

$$6. \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i) = \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n Y_i$$

$$7. \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i)^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n X_i Y_i + \sum_{i=1}^n Y_i^2$$

$$8. \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m X_i Y_j = \sum_{i=1}^n X_i \sum_{j=1}^m Y_j$$

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) = (1, 3, -3, 2),$$

$$(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = (2, 1, 2, -1) \text{ の例をとる。}$$

$$1. \sum_{i=1}^n X_i = 1 + 3 - 3 + 2 = 3$$

$$2. \sum_{i=1}^n X_i^2 = 1^2 + 3^2 + (-3)^2 + 2^2 = 23$$

2.1 重要な公式・性質

$$1. \text{標本平均 } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$2. \text{標本分散 } s^2 = s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$3. \text{標本共分散 } s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

$$4. \sum_{i=1}^n X_i = n\bar{X}$$

$$5. \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) = 0$$

$$6. \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2$$

$$7. \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

$$= \sum_{i=1}^n X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}$$

$$= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) Y_i$$

$$= \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}) X_i$$

3 最小二乗法について

経済理論に基づいた線型モデルの係数の値をデータから求める時に用いられる手法 \Rightarrow 最小二乗法

3.1 最小二乗法と回帰直線

$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ のように n 組のデータがあり, X_i と Y_i との間に以下の線型関係を想定する。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i,$$

X_i は説明変数, Y_i は被説明変数, α, β はパラメータとそれぞれ呼ばれる。

上の式は回帰モデル (または, 回帰式) と呼ばれる。目的は, 切片 α と傾き β をデータ $\{(X_i, Y_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ から推定すること,

データについて:

1. タイム・シリーズ (時系列)・データ: i が時間を表す (第 i 期)。
2. クロス・セクション (横断面)・データ: i が個人や企業を表す (第 i 番目の家計, 第 i 番目の企業)。

3.2 切片 α と傾き β の推定

次のような関数 $S(\alpha, \beta)$ を定義する。

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n u_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2$$

このとき,

$$\min_{\alpha, \beta} S(\alpha, \beta)$$

となるような α, β を求める (最小自乗法)。このときの解を $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ とする。

最小化のためには,

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0$$

を満たす α, β が $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ となる。

すなわち, $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ は,

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i) = 0, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n X_i (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i) = 0, \quad (2)$$

を満たす。

さらに,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n Y_i &= n\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum_{i=1}^n X_i, \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i &= \hat{\alpha} \sum_{i=1}^n X_i + \hat{\beta} \sum_{i=1}^n X_i^2, \end{aligned} \quad (3)$$

行列表示によって,

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix},$$

逆行列の公式:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ について, まとめて,

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n X_i^2 & -\sum_{i=1}^n X_i \\ -\sum_{i=1}^n X_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

さらに, $\hat{\beta}$ について解くと,

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \frac{n \sum_{i=1}^n X_i Y_i - (\sum_{i=1}^n X_i)(\sum_{i=1}^n Y_i)}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \bar{X}^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \end{aligned}$$

連立方程式の (3) 式から,

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{X}$$

となる。ただし,

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i,$$

とする。

数値例： 以下の数値例を使って，回帰式 $Y_i = \alpha + \beta X_i$ の α, β の推定値 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ を求める。

i	Y_i	X_i
1	6	10
2	9	12
3	10	14
4	10	16

$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ を求めるための公式は

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \bar{X}^2}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{X}$$

なので，必要なものは $\bar{X}, \bar{Y}, \sum_{i=1}^n X_i^2, \sum_{i=1}^n X_i Y_i$ である。

i	Y_i	X_i	$X_i Y_i$	X_i^2
1	6	10	60	100
2	9	12	108	144
3	10	14	140	196
4	10	16	160	256
合計	$\sum Y_i$ 35	$\sum X_i$ 52	$\sum X_i Y_i$ 468	$\sum X_i^2$ 696
平均	\bar{Y} 8.75	\bar{X} 13		

よって，

$$\hat{\beta} = \frac{468 - 4 \times 13 \times 8.75}{696 - 4 \times 13^2} = \frac{13}{20} = 0.65$$

$$\hat{\alpha} = 8.75 - 0.65 \times 13 = 0.3$$

となる。

注意事項：

1. α, β は真の値で未知
2. $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ は α, β の推定値でデータから計算される

回帰直線は

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i,$$

として与えられる。

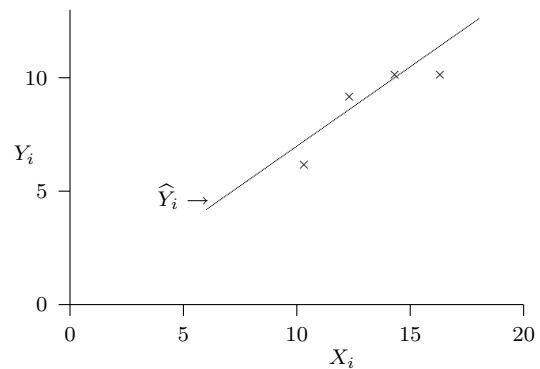
上の数値例では，

$$\hat{Y}_i = 0.3 + 0.65 X_i$$

となる。

i	Y_i	X_i	$X_i Y_i$	X_i^2	\hat{Y}_i
1	6	10	60	100	6.8
2	9	12	108	144	8.1
3	10	14	140	196	9.4
4	10	16	160	256	10.7
合計	$\sum Y_i$ 35	$\sum X_i$ 52	$\sum X_i Y_i$ 468	$\sum X_i^2$ 696	$\sum \hat{Y}_i$ 35.0
平均	\bar{Y} 8.75	\bar{X} 13			

図 2: Y_i, X_i, \hat{Y}_i



\hat{Y}_i を実績値 Y_i の予測値または理論値と呼ぶ。

$$\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i,$$

\hat{u}_i を残差と呼ぶ。

$$Y_i = \hat{Y}_i + \hat{u}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \hat{u}_i,$$

さらに， \bar{Y} を両辺から引いて，

$$(Y_i - \bar{Y}) = (\hat{Y}_i - \bar{Y}) + \hat{u}_i,$$

3.3 残差 \hat{u}_i の性質について

$\hat{u}_i = Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i$ に注意して，(1) 式から，

$$\sum_{i=1}^n \hat{u}_i = 0,$$

を得る。

(2) 式から，

$$\sum_{i=1}^n X_i \hat{u}_i = 0,$$

を得る。

$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i$ から,

$$\sum_{i=1}^n \hat{Y}_i \hat{u}_i = 0,$$

を得る。なぜなら,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \hat{Y}_i \hat{u}_i &= \sum_{i=1}^n (\hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i) \hat{u}_i \\ &= \hat{\alpha} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i + \hat{\beta} \sum_{i=1}^n X_i \hat{u}_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。

i	Y_i	X_i	\hat{Y}_i	\hat{u}_i	$X_i \hat{u}_i$	$\hat{Y}_i \hat{u}_i$
1	6	10	6.8	-0.8	-8.0	-5.44
2	9	12	8.1	0.9	10.8	7.29
3	10	14	9.4	0.6	8.4	5.64
4	10	16	10.7	-0.7	-11.2	-7.49
合計	$\sum Y_i$ 35	$\sum X_i$ 52	$\sum \hat{Y}_i$ 35.0	$\sum \hat{u}_i$ 0.0	$\sum X_i \hat{u}_i$ 0.0	$\sum \hat{Y}_i \hat{u}_i$ 0.00

3.4 決定係数 R^2 について

次の式

$$(Y_i - \bar{Y}) = (\hat{Y}_i - \bar{Y}) + \hat{u}_i,$$

の両辺を二乗して, 総和すると,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left((\hat{Y}_i - \bar{Y}) + \hat{u}_i \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + 2 \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y}) \hat{u}_i + \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 \end{aligned}$$

となる。まとめると,

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$$

を得る。さらに,

$$1 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} + \frac{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$$

それぞれの項は,

$$1. \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \implies y \text{ の全変動}$$

$$2. \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \implies \hat{Y}_i \text{ (回帰直線) で説明される部分}$$

$$3. \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 \implies \hat{Y}_i \text{ (回帰直線) で説明されない部分}$$

となる。

回帰式の当てはまりの良さを示す指標として, 決定係数 R^2 を以下の通りに定義する。

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$$

または,

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2},$$

として書き換えられる。

または, $Y_i = \hat{Y}_i + \hat{u}_i$ と

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})(Y_i - \bar{Y} - \hat{u}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})(Y_i - \bar{Y}) - \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y}) \hat{u}_i \\ &= \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})(Y_i - \bar{Y}) \end{aligned}$$

を用いて,

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \\ &= \frac{\left(\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \right)^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2} \\ &= \left(\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}} \right)^2 \end{aligned}$$

と書き換えられる。すなわち, R^2 は Y_i と \hat{Y}_i の相関係数の二乗と解釈される。

または, $\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i$ と $\bar{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\bar{X}$ を用いて,

$$\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = \hat{\beta}^2 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$= \hat{\beta} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

を利用すると,

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{\hat{\beta}^2 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \\ &= \frac{\hat{\beta} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \\ &= \left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} \right)^2 \end{aligned}$$

としても書き換えられる。

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 \text{ から, 明らかに,}$$

$$0 \leq R^2 \leq 1,$$

となる。 R^2 が 1 に近づけば回帰式の当てはまりは良いと言える。しかし, t 分布のような数表は存在しない。したがって, 「どの値よりも大きくなるべき」というような基準はない。

慣習的には, メドとして 0.9 以上を判断基準にする。

数値例: 決定係数の計算には以下の公式を用いる。

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}^2 \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)}{\sum_{i=1}^n Y_i^2 - n\bar{Y}^2}$$

計算に必要なものは, $\hat{\beta}, \bar{X}, \bar{Y}, \sum_{i=1}^n X_i^2, \sum_{i=1}^n Y_i^2$ である。

i	Y_i	X_i	Y_i^2	X_i^2
1	6	10	36	100
2	9	12	81	144
3	10	14	100	196
4	10	16	100	256
合計	$\sum Y_i$ 35	$\sum X_i$ 52	$\sum Y_i^2$ 317	$\sum X_i^2$ 696
平均	\bar{Y} 8.75	\bar{X} 13		

$$\hat{\beta} = 0.65, \bar{X} = 13, \bar{Y} = 8.75, \sum_{i=1}^n X_i^2 = 696, \sum_{i=1}^n Y_i^2 =$$

317 なので,

$$R^2 = \frac{0.65^2(696 - 4 \times 13^2)}{317 - 4 \times 8.75^2} = \frac{8.45}{10.75} = 0.786$$

3.5 まとめ

$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ を求めるための公式は

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2} \\ \hat{\alpha} &= \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} \end{aligned}$$

なので, 必要なものは $\bar{X}, \bar{Y}, \sum_{i=1}^n X_i^2, \sum_{i=1}^n X_i Y_i$ である。決定係数の計算には以下の公式を用いる。

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}^2 \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)}{\sum_{i=1}^n Y_i^2 - n\bar{Y}^2}$$

計算に必要なものは, $\hat{\beta}, \bar{X}, \bar{Y}, \sum_{i=1}^n X_i^2, \sum_{i=1}^n Y_i^2$ である。

4 統計学の復習

4.1 連続型確率変数

1. 確率変数: X (離散型と連続型)
2. 実現値: x
3. 変数 X の実現値 x に対応して, 次の 3 つの条件を満たす関数 $f(x)$ を定義する。

$$f(x) \geq 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1,$$

$$\text{Prob}(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx,$$

ただし, $a < b$ とする。

このとき, X を連続型確率変数, $f(x)$ を確率密度関数 (単に, 密度関数) と呼ぶ。

4. 連続型確率変数において, 確率変数が 2 つの実数値 (a, b) に含まれる確率を $\text{Prob}(a < X < b)$ として表現する。
5. 連続型確率変数の期待値は,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

で与えられる。

6. 期待値の公式 :

$$E(aX) = aE(X),$$

$$E(aX + b) = aE(X) + b,$$

ただし, a, b は定数とする。

7. また, 分散は,

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

で与えられる。

8. 分散の公式 :

$$V(aX) = a^2 V(X),$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X),$$

9. 分散と期待値 :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X - E(X))^2, \\ &= E(X^2) - (E(X))^2, \end{aligned}$$

10. 一般的に, $g(X)$ の期待値は,

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx,$$

として得られる。

11. $g(X) = X$ のとき, X の期待値,

$g(X) = (X - E(X))^2$ のとき, X の分散となる。

4.2 多変数確率変数

1. 2 変数確率変数 X と Y の密度関数 :

(a) 結合密度関数 : $f(x, y)$

(b) 周辺密度関数 :

$$f(x) = \int f(x, y) dy,$$

$$f(y) = \int f(x, y) dx$$

(c) 条件付き密度関数 :

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} = \frac{f(x, y)}{\int f(x, y) dx},$$

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f(x)} = \frac{f(x, y)}{\int f(x, y) dy}$$

(d) X と Y の独立性 : $f(x, y) = f(x)f(y)$

すなわち, $f(x|y) = f(x), f(y|x) = f(y)$

2. 2 変数確率変数 X と Y の期待値, 分散, 共分散について :

$$(a) E(X) = \iint xf(x, y) dx dy$$

$$E(Y) = \iint yf(x, y) dx dy$$

$$(b) V(X) = \iint (x - E(X))^2 f(x, y) dx dy$$

$$V(Y) = \iint (y - E(Y))^2 f(x, y) dx dy$$

(c) $Cov(X, Y)$

$$= \iint (x - E(X))(y - E(Y)) f(x, y) dx dy$$

$$(d) E(X|Y) = \int xf(x|y) dx$$

$$E(Y|X) = \int yf(y|x) dy$$

$$(e) V(X|Y) = \int (x - E(X|Y))^2 f(x|y) dx$$

$$V(Y|X) = \int (y - E(Y|X))^2 f(y|x) dy$$

(f) $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

(g) X と Y が独立であれば, $Cov(X, Y) = 0$ となる。(逆は言えない)

(h) $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

ただし, a, b は定数とする。

(i) $V(aX + bY) = a^2 V(X) + 2ab Cov(X, Y) + b^2 V(Y)$

(j) X と Y が独立であれば,

$$V(aX + bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y)$$

3. 多変数への拡張 :

X_1, X_2, \dots, X_n の n 個の確率変数を考える。 c_1, c_2, \dots, c_n を定数とする。

$$(a) E\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i E(X_i)$$

- (b) $V(\sum_{i=1}^n c_i X_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j \text{Cov}(X_i, X_j)$
 $i = j$ のときは, $\text{Cov}(X_i, X_j) = V(X_i)$ となることに, 注意すると,

$$\begin{aligned} & V(\sum_{i=1}^n c_i X_i) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i^2 V(X_i) \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n c_i c_j \text{Cov}(X_i, X_j) \end{aligned}$$

を得る。

- (c) 特に, X_1, X_2, \dots, X_n が互いに独立の場合は,

$$V(\sum_{i=1}^n c_i X_i) = \sum_{i=1}^n c_i^2 V(X_i)$$

となる。

4.3 $f(x)$ の関数型, 密度関数の種類

1. 正規分布:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2},$$

ただし, π は円周率 (3.141592...), e は自然対数の底 (2.71828...) である。

- (a) μ について, 左右対称
 (b) $E(X) = \mu$
 (c) $V(X) = \sigma^2$ (標準偏差は σ)
 (d) 確率変数 X は平均 μ , 分散 σ^2 の正規分布に従う。 $\implies X \sim N(\mu, \sigma^2)$
 (e) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき,

$$\begin{aligned} \text{Prob}(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) &= 0.683 \\ \text{Prob}(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) &= 0.954 \\ \text{Prob}(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) &= 0.997 \end{aligned}$$

なる。

- (f) μ の大きさによる $N(\mu, \sigma^2)$ の違い。
 (g) σ^2 の大きさによる $N(\mu, \sigma^2)$ の違い。

2. 標準正規分布:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

すなわち, $X \sim N(0, 1)$

- (a) $E(X) = 0$
 (b) $V(X) = 1$
 (c) $X \sim N(0, 1)$ のとき,

$$\begin{aligned} \text{Prob}(-1 < X < 1) &= 0.683 \\ \text{Prob}(-2 < X < 2) &= 0.954 \\ \text{Prob}(-3 < X < 3) &= 0.997 \end{aligned}$$

なる。他に, よく使われるパーセント点は,

$$\begin{aligned} \text{Prob}(-1.645 < X < 1.645) &= 0.90 \\ \text{Prob}(-1.960 < X < 1.960) &= 0.95 \\ \text{Prob}(-2.326 < X < 2.326) &= 0.99 \end{aligned}$$

である。

- (d) 正規分布と標準正規分布との関係:

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき, $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ を定義する。
 このとき, $Z \sim N(0, 1)$ となる。

- (e) 正規分布表から確率の計算を行う。

3. 正規分布の特徴:

- (a) n 個の独立な確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n が同一の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うものとする。このとき,

$$\sum_{i=1}^n c_i X_i \sim N\left(\mu \sum_{i=1}^n c_i, \sigma^2 \sum_{i=1}^n c_i^2\right)$$

となる。

- (b) 特に, 標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ を考えると,

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

となる。(すべての i について, $c_i = \frac{1}{n}$ の場合を考えればよい。)

- (c) n 個の独立な確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n が同一の平均 μ , 分散 σ^2 の分布に従うものとする。(正規分布を仮定しない)

このとき、 n が大きくなるにつれて、 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ は、標準正規分布に近づく。すなわち、

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1)$$

となる。

⇒ 中心極限定理

4. χ^2 (カイ二乗) 分布：

m 個の確率変数 Z_1, Z_2, \dots, Z_m は、互いに独立な標準正規分布に従うものとする。このとき、 $Y = \sum_{i=1}^m Z_i^2$ は、自由度 m の χ^2 分布に従う。

$Y \sim \chi^2(m)$ 、または、 $Y \sim \chi_m^2$ と表記する。

χ^2 (カイ二乗) 分布表から確率を求める。

$Y \sim \chi^2(m)$ のとき、 $E(Y) = m$ 、 $V(Y) = 2m$ となる。(証明略)

(a) 2 つの独立な χ^2 分布からの確率変数 X, Y を考える。 $X \sim \chi^2(n)$ 、 $Y \sim \chi^2(m)$ とする。このとき、 $Z = X + Y \sim \chi^2(n + m)$ となる。(証明略)

(b) n 個の独立な確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n が同一の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うものとする。

(c) $\frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ なので、 $\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$ となる。

$\frac{X_1 - \mu}{\sigma}, \frac{X_2 - \mu}{\sigma}, \dots, \frac{X_n - \mu}{\sigma}$ はそれぞれ独立なので、

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$$

となる。

(d) μ を \bar{X} に置き換えると、

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n - 1)$$

となる。(証明は後述)

さらに、

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

を定義すると、

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

となる。 S^2 は σ^2 の不偏推定量である(後述)。

5. t 分布：

Z を標準正規分布、 Y を自由度 m の χ^2 分布に従い、両者は独立な確率変数とする。このとき、 $U = \frac{Z}{\sqrt{Y/m}}$ は、自由度 m の t 分布に従う。

$U \sim t(m)$ 、または、 $U \sim t_m$ と表記する。

$U \sim t(m)$ のとき、 $m > 1$ について $E(U) = 0$ 、 $m > 2$ について $V(U) = \frac{m}{m-2}$ となる。(証明略)

t 分布表から確率を求める。(表 2 を見よ)

(a) ゼロを中心に左右対称。 $(E(U) = 0)$

(b) t 分布は、標準正規分布より裾野の広い分布(なぜなら、 $V(U) = \frac{m}{m-2} > 1$)

(c) $m \rightarrow \infty$ のとき、 $t(m) \rightarrow N(0, 1)$ となる。(期待値は $m > 1$ について $E(U) = 0$ 、分散は $V(U) = \frac{m}{m-2} \rightarrow 1$)

6. F 分布：

X は自由度 m の χ^2 分布、 Y は自由度 n の χ^2 分布に従い、両者は独立な確率変数とする。このとき、 $V = \frac{X/m}{Y/n}$ は、自由度 (m, n) の F 分布に従う。

$V \sim F(m, n)$ 、または、 $V \sim F_{m,n}$ と表記する。

F 分布表から確率を求める。(表 3 を見よ)

(a) $U \sim t(n)$ とする。このとき、 $V = U^2 \sim F(1, n)$ となる。(証明略)

(b) $U \sim F(n, m)$ のとき、 $V = \frac{1}{U} \sim F(m, n)$ となる。(証明略)

4.4 統計的推測

ある母集団から標本数 n の独立な標本 X_1, X_2, \dots, X_n が抽出されたとき、これを用いて母平均 μ 、母分散 σ^2 に対する統計的推測を行うことができる。

母平均、母分散のような母集団の特性を表すものを母数(パラメータ)と呼ぶ。

統計的推測とは、

1. 推定

2. 区間推定

表 1: 正規分布表 $N(0, 1)$

$$\alpha = \text{Prob}(Z > z_\alpha) = \int_{z_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx$$

z_α	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4841	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4091	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2644	.2611	.2579	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2297	.2266	.2236	.2207	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1563	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1094	.1075	.1057	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0722	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0390	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0352	.0344	.0333	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
2.4	.0082	.0080	.0078	.0076	.0073	.0071	.0070	.0068	.0066	.0064
2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0042	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002

α	.10	.05	.025	.010	.005
z_α	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758

表 2: t 分布表 — $t(m)$

$$\alpha = P(t > t_\alpha) = \int_{t_\alpha}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{1}{\sqrt{m\pi}} \frac{1}{(1 + \frac{x^2}{m})^{\frac{m+1}{2}}} dx$$

α	.10	.05	.025	.010	.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
31	1.309	1.696	2.040	2.453	2.744
32	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738
33	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733
34	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
35	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
36	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719
37	1.305	1.687	2.026	2.431	2.715
38	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712
39	1.304	1.685	2.023	2.426	2.708
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
41	1.303	1.683	2.020	2.421	2.701
42	1.302	1.682	2.018	2.418	2.698
43	1.302	1.681	2.017	2.416	2.695
44	1.301	1.680	2.015	2.414	2.692
45	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690
46	1.300	1.679	2.013	2.410	2.687
47	1.300	1.678	2.012	2.408	2.685
48	1.299	1.677	2.011	2.407	2.682
49	1.299	1.677	2.010	2.405	2.680
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
80	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
240	1.285	1.651	1.970	2.342	2.596
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

表 3: F 分布表 - $F(m, n)$

$$\alpha = \text{Prob}(F > f_\alpha) = \int_{f_\alpha}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{x^{\frac{m-2}{2}}}{(1+\frac{m}{n}x)^{\frac{m+n}{2}}} dx$$

m	n	α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40
2	.050	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.9
	.025	38.5	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.5	39.5
	.010	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5
	.005	198.	199.	199.	199.	199.	199.	199.	199.	199.	199.	199.	199.	199.	199.	199.
	.050	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.70	8.66	8.62	8.59	
3	.025	17.4	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.5	14.4	14.3	14.2	14.1	14.0	
	.010	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	26.9	26.7	26.5	26.4	
	.005	55.6	49.8	47.5	46.2	45.4	44.8	44.4	44.1	43.9	43.7	43.1	42.8	42.5	42.3	
	.050	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.86	5.80	5.75	5.72	
	.025	12.2	10.6	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.66	8.56	8.46	8.41	
4	.010	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.2	14.0	13.8	13.7	
	.005	31.3	26.3	24.3	23.2	22.5	22.0	21.6	21.4	21.1	21.0	20.4	20.2	19.9	19.8	
	.050	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.62	4.56	4.50	4.46	
	.025	10.0	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.43	6.33	6.23	6.18	
	.010	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.72	9.55	9.38	9.29	
5	.005	22.8	18.3	16.5	15.6	14.9	14.5	14.2	14.0	13.8	13.6	13.1	12.9	12.7	12.5	
	.050	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	3.94	3.87	3.81	3.77	
	.025	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.27	5.17	5.07	5.01	
	.010	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.56	7.40	7.23	7.14	
	.005	18.6	14.5	12.9	12.0	11.5	11.1	10.8	10.6	10.4	10.2	9.81	9.59	9.36	9.24	
6	.050	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.51	3.44	3.38	3.34	
	.025	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.57	4.47	4.36	4.31	
	.010	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.31	6.16	5.99	5.91	
	.005	16.2	12.4	10.9	10.0	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51	8.38	7.97	7.75	7.53	7.42	
	.050	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.22	3.15	3.08	3.04	
7	.025	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.10	4.00	3.89	3.84	
	.010	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.52	5.36	5.20	5.12	
	.005	14.7	11.0	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34	7.21	6.81	6.61	6.40	6.29	
	.050	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.01	2.94	2.86	2.83	
	.025	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.77	3.67	3.56	3.51	
8	.010	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	4.96	4.81	4.65	4.57	
	.005	13.6	10.1	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54	6.42	6.03	5.83	5.62	5.52	
	.050	4.96	4.10	3.81	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.84	2.77	2.70	2.66	
	.025	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.52	3.42	3.31	3.26	
	.010	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.56	4.41	4.25	4.17	
9	.005	12.8	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97	5.85	5.47	5.27	5.07	4.97	
	.050	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.10	3.01	2.95	2.90	2.85	2.72	2.65	2.57	2.53	
	.025	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.33	3.23	3.12	3.06	
	.010	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.25	4.10	3.94	3.86	
	.005	12.2	8.91	7.60	6.88	6.42	6.10	5.87	5.68	5.54	5.42	5.05	4.86	4.65	4.55	
10	.050	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.62	2.54	2.47	2.43	
	.025	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.18	3.07	2.96	2.91	
	.010	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.01	3.86	3.70	3.62	
	.005	11.8	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20	5.09	4.72	4.53	4.33	4.23	
	.050	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.53	2.46	2.38	2.34	
11	.025	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.05	2.95	2.84	2.78	
	.010	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.82	3.67	3.51	3.43	
	.005	11.4	8.19	6.93	6.23	5.79	5.48	5.25	5.08	4.94	4.82	4.46	4.27	4.07	3.97	

表 3: F 分布表 - $F(m, n) < \text{続き} >$

m		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40
n	α														
14	.050	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.46	2.39	2.31	2.27
	.025	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	2.95	2.84	2.73	2.67
	.010	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.66	3.51	3.35	3.27
	.005	11.1	7.92	6.68	6.00	5.56	5.26	5.03	4.86	4.72	4.60	4.25	4.06	3.86	3.76
15	.050	4.53	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.40	2.33	2.25	2.20
	.025	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.42	3.29	3.20	3.12	3.06	2.86	2.76	2.64	2.59
	.010	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.90	3.81	3.52	3.37	3.21	3.13
	.005	10.8	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	4.42	4.07	3.88	3.69	3.59
16	.050	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.35	2.28	2.19	2.15
	.025	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.79	2.68	2.57	2.51
	.010	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.41	3.26	3.10	3.02
	.005	10.6	7.51	6.30	5.64	5.21	4.91	4.69	4.52	4.38	4.27	3.92	3.73	3.54	3.44
17	.050	4.45	3.59	3.20	2.97	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.31	2.23	2.15	2.10
	.025	6.04	4.62	4.01	3.67	3.44	3.28	3.16	3.06	2.99	2.92	2.72	2.62	2.50	2.44
	.010	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.31	3.16	3.00	2.92
	.005	10.4	7.35	6.16	5.50	5.08	4.78	4.56	4.39	4.25	4.14	3.79	3.61	3.41	3.31
18	.050	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.27	2.19	2.11	2.06
	.025	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.67	2.56	2.44	2.38
	.010	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.23	3.08	2.92	2.84
	.005	10.2	7.21	6.03	5.37	4.96	4.66	4.44	4.28	4.14	4.03	3.68	3.50	3.30	3.20
19	.050	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.23	2.16	2.07	2.03
	.025	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.62	2.51	2.39	2.33
	.010	8.19	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.15	3.00	2.84	2.76
	.005	10.1	7.09	5.92	5.27	4.85	4.56	4.35	4.18	4.04	3.93	3.59	3.40	3.21	3.11
20	.050	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.20	2.12	2.04	1.99
	.025	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.57	2.46	2.35	2.29
	.010	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.09	2.94	2.78	2.69
	.005	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85	3.50	3.32	3.12	3.02
25	.050	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.09	2.01	1.92	1.87
	.025	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.41	2.30	2.18	2.12
	.010	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.85	2.70	2.54	2.45
	.005	9.48	6.60	5.46	4.84	4.43	4.15	3.94	3.78	3.64	3.54	3.20	3.01	2.82	2.72
30	.050	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.01	1.93	1.84	1.79
	.025	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.31	2.20	2.07	2.01
	.010	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.70	2.55	2.39	2.30
	.005	9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45	3.34	3.01	2.82	2.63	2.52
40	.050	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	1.92	1.84	1.74	1.69
	.025	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.18	2.07	1.94	1.88
	.010	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.52	2.37	2.20	2.11
	.005	8.83	6.07	4.98	4.37	3.99	3.71	3.51	3.35	3.22	3.12	2.78	2.60	2.40	2.30
60	.050	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.84	1.75	1.65	1.59
	.025	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.06	1.94	1.82	1.74
	.010	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.35	2.20	2.03	1.94
	.005	8.49	5.80	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01	2.90	2.57	2.39	2.19	2.08
120	.050	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.75	1.66	1.55	1.50
	.025	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	1.94	1.82	1.69	1.61
	.010	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.19	2.03	1.86	1.76
	.005	8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81	2.71	2.37	2.19	1.98	1.87
∞	.050	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.67	1.57	1.46	1.39
	.025	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.83	1.71	1.57	1.48
	.010	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.04	1.88	1.70	1.59
	.005	7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62	2.52	2.19	2.00	1.79	1.67

3. 仮説検定

から成る。

1. 理論標本, 理論観測値

$$\Rightarrow X_1, X_2, \dots, X_n$$

2. 実現された標本, 実現された観測値, 実現値

$$\Rightarrow x_1, x_2, \dots, x_n$$

4.4.1 統計量, 推定量, 推定値

1. 理論観測値 X_1, X_2, \dots, X_n の関数 \Rightarrow 統計量

2. 母平均 μ の推定に使われる統計量 $\Rightarrow \mu$ の推定量

$$(a) \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ は } \mu \text{ の推定量}$$

$$(b) S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ は } \sigma^2 \text{ の推定量}$$

3. 実現された標本を用いて実際に計算された推定量の値 \Rightarrow 推定値

$$(a) \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \text{ は } \mu \text{ の推定値}$$

$$(b) s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \text{ は } \sigma^2 \text{ の推定値}$$

4. μ や σ^2 の推定量の候補は無数に考えられる。

4.4.2 推定量の望ましい性質

1. 不偏性:

ある母集団のある母数 θ に対して, θ の推定量として $\hat{\theta}$ を考える。

このとき,

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

となるとき, $\hat{\theta}$ は θ の不偏推定量であると言う。

$\hat{\theta}$ は不偏性を持つと言う。

$E(\hat{\theta}) - \theta$ は偏りと定義される。

(a) 標本平均 \bar{X} は μ の不偏推定量である。

証明:

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu \\ &= \mu \end{aligned}$$

このように, $E(\bar{X}) = \mu$ なので, 標本平均 \bar{X} は μ の不偏推定量となる。

(b) 標本分散 S^2 は σ^2 の不偏推定量である。

証明:

準備として, 以下の計算を行う。

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n ((X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - 2 \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)(\bar{X} - \mu) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (\bar{X} - \mu)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu) \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (\bar{X} - \mu)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - 2n(\bar{X} - \mu)^2 \\ &\quad + n(\bar{X} - \mu)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2 \end{aligned}$$

途中で, $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu) = n(\bar{X} - \mu)$ に注意せよ。
上の式を代入して, 計算すると,

$$\begin{aligned} E(S^2) &= E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) \\ &= \frac{1}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n E(X_i - \mu)^2 - nE(\bar{X} - \mu)^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n-1} (n\sigma^2 - \sigma^2) \\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

となる。途中で、 $E(X_i - \mu)^2 = \sigma^2$ 、 $E(\bar{X} - \mu)^2 = \sigma^2/n$ に注意せよ。

このように、 $E(S^2) = \sigma^2$ なので、標本分散 S^2 は σ^2 の不偏推定量となる。

2. 有効性 :

ある母数 θ に対して、 $\hat{\theta}_1$ と $\hat{\theta}_2$ の 2 つの不偏推定量を考える。

このとき、 $V(\hat{\theta}_1) \leq V(\hat{\theta}_2)$ が成り立つとき、 $\hat{\theta}_1$ は $\hat{\theta}_2$ より有効であると言う。

ある母数 θ に対して、可能なすべての不偏推定量を考え、 $\hat{\theta}$ が最も小さな分散を持つ不偏推定量であるとする。

このとき、 $\hat{\theta}$ を最小分散不偏推定量、または、最良不偏推定量と言う。

- (a) ある母集団から標本数 n の独立な標本 X_1, X_2, \dots, X_n は、それぞれ、平均 μ 、分散 σ^2 の分布を持つものとする。

μ の推定量 $\sum_{i=1}^n c_i X_i$ を考える。

- (b) 推定量 $\sum_{i=1}^n c_i X_i$ が不偏であるためには、

$$E\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right) = \mu$$

の条件が必要となる。すなわち、

$$\begin{aligned}
E\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right) &= \sum_{i=1}^n c_i E(X_i) \\
&= \sum_{i=1}^n c_i \mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu \sum_{i=1}^n c_i \\
&= \mu
\end{aligned}$$

なので、不偏であるためには、

$$\sum_{i=1}^n c_i = 1$$

でなければならない。

- (c) $\sum_{i=1}^n c_i = 1$ を満たし、推定量 $\sum_{i=1}^n c_i X_i$ が最も分散が小さくなる c_1, c_2, \dots, c_n を求める。

- (d) 推定量 $\sum_{i=1}^n c_i X_i$ の分散は、

$$\begin{aligned}
V\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right) &= \sum_{i=1}^n c_i V(X_i) \\
&= \sum_{i=1}^n c_i^2 \sigma^2 \\
&= \sigma^2 \sum_{i=1}^n c_i^2
\end{aligned}$$

となる。

- (e) $\sum_{i=1}^n c_i = 1$ の条件のもとで、 $\sum_{i=1}^n c_i^2$ を最小にする c_1, c_2, \dots, c_n を求める。

- (f) ラグランジュ未定乗数法 :

ラグランジュ関数 $L = L(c_1, c_2, \dots, c_n, \lambda)$ は、

$$L = \sum_{i=1}^n c_i^2 + 2\lambda\left(1 - \sum_{i=1}^n c_i\right)$$

として構成される。

目的関数 $\sum_{i=1}^n c_i^2$ は 2 次式なので、最小値が存在する。

- (g) 最小化のためには、以下の連立方程式を解けばよい。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial c_i} &= 2c_i - 2\lambda = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 2\left(1 - \sum_{i=1}^n c_i\right) = 0,
\end{aligned}$$

すなわち、 $c_i = \lambda$ と $\sum_{i=1}^n c_i = 1$ を満たす c_i を求めることになる。

$$c_i = \lambda = \frac{1}{n}$$

を得る。

(h) 推定量 $\sum_{i=1}^n c_i X_i$ の中で, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ が最も小さな分散を持つ推定量となる。

⇒ 最小分散線型不偏推定量

3. 一致性 :

ある母数 θ について推定量 $\hat{\theta}$ を考える。 n 個の標本から構成された推定量を $\hat{\theta}^{(n)}$ と定義する。

数列 $\hat{\theta}^{(1)}, \hat{\theta}^{(2)}, \dots, \hat{\theta}^{(n)}, \dots$ を考える。

十分大きな n について, $\hat{\theta}^{(n)}$ が θ に確率的に収束するとき, $\hat{\theta}$ は θ の一致推定量であると言う。

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta} = \theta$$

と表現する。

(a) 平均二乗誤差 MSE について :

定義 :

$$\text{MSE}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2$$

式の展開 :

$$\begin{aligned} & \text{MSE}(\hat{\theta}) \\ &= E(\hat{\theta} - \theta)^2 \\ &= E\left((\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) - (E(\hat{\theta}) - \theta)\right)^2 \\ &= E\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right)^2 \\ &\quad - 2E\left((\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta)\right) \\ &\quad + E(E(\hat{\theta}) - \theta)^2 \\ &= V(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2 \end{aligned}$$

途中で, $E(E(\hat{\theta}) - \theta)^2 = (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$ と

$$\begin{aligned} & E\left((\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta)\right) \\ &= (E(\hat{\theta}) - \theta)E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が使われている。 $E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) = 0$ である。

$E(\hat{\theta})$ や θ は確率変数ではないことに注意せよ。

(b) $\hat{\theta}$ が θ の不偏推定量であれば, $E(\hat{\theta}) = \theta$ となるので,

$$\text{MSE}(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta})$$

を得る。

(c) 確率的に収束 $\Rightarrow n \rightarrow \infty$ のとき, $\text{MSE}(\hat{\theta}) \rightarrow 0$ となること。

(d) $n \rightarrow \infty$ のとき, $\text{MSE}(\hat{\theta}) \rightarrow 0$ が成り立てば, $\hat{\theta}$ は θ の一致推定量である。

(e) μ の推定量 \bar{X} を調べる。

$$E(\bar{X}) = \mu$$

なので,

$$\text{MSE}(\bar{X}) = V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

となる。 $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\text{MSE}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \rightarrow 0$$

となるので, \bar{X} は μ の一致推定量であると言える。

4.4.3 標本平均 \bar{X} の分布

X_1, X_2, \dots, X_n の n 個の確率変数は, 互いに独立で, 平均 μ , 分散 σ^2 の正規分布に従うものとする。

1. Z を標準正規分布, Y を自由度 m の χ^2 分布に従い, 両者は独立な確率変数とする。このとき, $U = \frac{Z}{\sqrt{Y/m}}$ は, 自由度 m の t 分布に従う。
2. $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ なので, $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ となる。
3. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ である。(証明は下)
4. $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ と $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ は独立。(証明は下) すなわち, \bar{X} と S^2 は独立。
5. したがって,

$$\frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} / n - 1}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

を得る。

重要な結果は、

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

ただし、 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ である。

4.4.4 \bar{X} と $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ の独立性と分布

コ克兰の定理： 正規母集団 $N(0, 1)$ からの標本 X_1, X_2, \dots, X_n によって、階数 n_i の 2 次形式 Q_i が、

$$\sum_{i=1}^m Q_i = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

を満たすものとする。このとき、 Q_1, Q_2, \dots, Q_m が互いに独立で、かつ、 Q_i が自由度 n_i の χ^2 分布に従うための必要十分条件は、

$$\sum_{i=1}^m n_i = n$$

となることである。

\bar{X} と S^2 の独立性： 確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n は互いに独立に、平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布に従うものとする。このとき、

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

は互いに独立であることをコ克兰の定理を用いて証明する。

Z_i を標準正規分布に変換する。

$$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$$

Z_1, Z_2, \dots, Z_n は互いに独立に標準正規分布に従う。

\bar{Z} を Z_1, Z_2, \dots, Z_n からの標本平均として定義する。

$$\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$$

$\sum_{i=1}^n Z_i^2$ は、 n 個の独立な標準正規分布の確率変数の二乗和なので、 $\chi^2(n)$ 分布に従う。

$$\sum_{i=1}^n Z_i^2 = \sum_{i=1}^n \left((Z_i - \bar{Z}) + \bar{Z} \right)^2$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2 + 2 \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})\bar{Z} + \sum_{i=1}^n \bar{Z}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2 + n\bar{Z}^2 \\ &= Q_1 + Q_2 \end{aligned}$$

$Q_1 = \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2$ と $Q_2 = n\bar{Z}^2$ の 2 次形式の係数行列の階数 (ランク) が、それぞれ $n-1$ と 1 であれば、コ克兰の定理により、両者は独立に分布し、しかも、 $\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2 \sim \chi^2(n-1)$ を証明することができる。

Q_2 については、

$$\begin{aligned} Q_2 &= n\bar{Z}^2 \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n Z_i \right)^2 \\ &= \frac{1}{n} (\mathbf{l}' \mathbf{Z})^2 \\ &= \frac{1}{n} (\mathbf{l}' \mathbf{Z})' (\mathbf{l}' \mathbf{Z}) \\ &= \frac{1}{n} \mathbf{Z}' \mathbf{U}' \mathbf{Z} \\ &= \frac{1}{n} \mathbf{Z}' \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Z} \end{aligned}$$

\mathbf{l} は n 個の要素が全部 1 の縦ベクトルを表し、 \mathbf{Z} は Z_1, Z_2, \dots, Z_n の n 個の確率変数から成る縦ベクトルを表す。すなわち、 $\mathbf{l} = (1, 1, \dots, 1)'$ 、 $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)'$ である。

2 次形式 Q_2 の係数行列は、

$$\frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

となり、明らかに、階数は 1 の行列となっている。

Q_1 については、

$$\begin{aligned} Q_1 &= \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n Z_i^2 - n\bar{Z}^2 \\ &= \mathbf{Z}' \mathbf{I}_n' \mathbf{Z} - \frac{1}{n} \mathbf{Z}' \mathbf{U}' \mathbf{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{Z}' \left(\mathbf{I}_n' - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}' \right) \mathbf{Z} \\
&= \mathbf{Z}' \begin{pmatrix} 1-1/n & -1/n & \cdots & -1/n \\ -1/n & 1-1/n & \ddots & -1/n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1/n & -1/n & \cdots & 1-1/n \end{pmatrix} \mathbf{Z} \\
&= \begin{vmatrix} 1-(n-1)/n & -1/n & \cdots & -1/n \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{n} \neq 0
\end{aligned}$$

2次形式 Q_1 の係数行列 D は,

$$D = \begin{pmatrix} 1-1/n & -1/n & \cdots & -1/n \\ -1/n & 1-1/n & \ddots & -1/n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1/n & -1/n & \cdots & 1-1/n \end{pmatrix}$$

となる。 $(D$ は $n \times n$ の行列)

まず、各行から第1行を引いて、次に、各列を第1列に加えると、

$$\begin{aligned}
|D| &= \begin{vmatrix} 1-1/n & -1/n & \cdots & -1/n \\ -1 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & -1/n & \cdots & -1/n \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}$$

を得る。 $(D$ の階数は n より小さいことがわかった。)

次に、 D の任意の $n-1$ 次首座小行列 $D^{(1)}$ の行列式の値を計算する。

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 1-1/n & -1/n & \cdots & -1/n \\ -1/n & 1-1/n & \ddots & -1/n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1/n & -1/n & \cdots & 1-1/n \end{pmatrix}$$

となる。 $(D^{(1)}$ は $n-1 \times n-1$ の行列)

同様に、まず、各行から第1行を引いて、次に、各列を第1列に加えると、

$$|D^{(1)}| = \begin{vmatrix} 1-1/n & -1/n & \cdots & -1/n \\ -1 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

を得る。すなわち、 Q_1 の階数は $n-1$ であることがわかった。

まとめると、

$$Q_1 + Q_2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2,$$

において、

Q_1 の2次形式の係数行列の階数は $n_1 = n-1$,

Q_2 の2次形式の係数行列の階数は $n_2 = 1$,

となり、 $n_1 + n_2 = n$ が成り立ち、コクランの定理の必要十分条件が成立したことになる。

よって、 $Q_1 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従い、 $Q_2 = \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\right)^2$ とは独立となる。したがって、 S^2 と \bar{X} とは独立となる。

4.4.5 区間推定 (信頼区間)

\bar{X} の分布を利用して、 μ の信頼区間を求める。

1. \bar{X} の分布は以下の通り。

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

となる。

2. $t_{\alpha/2}(n-1)$, $t_{1-\alpha/2}(n-1)$ を自由度 $n-1$ の t 分布の上から $100 \times \frac{\alpha}{2} \%$ 点, $100 \times (1 - \frac{\alpha}{2}) \%$ 点の値とする。このとき、

$$\text{Prob}\left(t_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1 - \alpha$$

となる。ただし、自由度と α が決まれば、 $t_{\alpha/2}(n-1)$, $t_{1-\alpha/2}(n-1)$ は t 分布表から得られる。

3. t 分布は左右対称なので、

$$t_{1-\alpha/2}(n-1) = -t_{\alpha/2}(n-1)$$

$$t_{\alpha/2}(n-1) = |t_{1-\alpha/2}(n-1)|$$

$$t_{1-\alpha/2}(n-1) = -|t_{\alpha/2}(n-1)|$$

となる。

4. 書き直して,

$$\text{Prob}\left(\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

となる。

5. μ が区間 $(\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}})$ にある確率は $1 - \alpha$ である。

6. 推定量 \bar{X}, S^2 をその推定値 \bar{x}, s^2 で置き換える。ただし, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ とする。

7. 区間 $(\bar{x} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$ を信頼係数 $1 - \alpha$ の信頼区間といい, $\bar{x} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$ を信頼下限, $\bar{x} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$ を信頼上限と呼ぶ。

4.4.6 仮説検定

\bar{X} の分布を利用して, μ の仮説検定を行う。

1. 帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$

対立仮説 $H_1: \mu \neq \mu_0$

2. 帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ が正しいもとでの分布は,

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

となる。

3. $\text{Prob}(t_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)) = 1 - \alpha$

$t_{\alpha/2}(n-1), t_{1-\alpha/2}(n-1)$ をそれぞれ自由度 $n-1$ の t 分布の上から $100 \times \frac{\alpha}{2} \%$ 点, $100 \times \frac{1-\alpha}{2} \%$ 点の値とする。

自由度と α が決まれば, $t_{\alpha/2}(n-1), t_{1-\alpha/2}(n-1)$ は t 分布表から得られる。

4. α を有意水準と呼ぶ。慣習的に $\alpha = 0.01, 0.05$ が使われる。

5. $-t_{\alpha/2}(n-1) > \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$, または,

$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_{\alpha/2}(n-1)$ ならば, 帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ は, 分布の端にあり, 起こりにくいと考ええる。

\Rightarrow 有意水準 α で帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ を棄却する。

6. 実際の検定手続:

(a) \bar{X}, S^2 を実績値で置き換えて,

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

を得る。

ただし, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ とする。

(b) $-t_{\alpha/2}(n-1) > \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$, または,

$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_{\alpha/2}(n-1)$ ならば, 有意水準 α で帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ を棄却する。

5 統計学の回帰分析への応用

$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ のように n 組のデータがあり, X_i と Y_i との間に線型関係を想定する。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i$$

最小二乗法を用いて, データに直線のあてはめを行った。

$\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{Y}_i$ を求めるための公式は

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})Y_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \end{aligned}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X},$$

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i,$$

である。

$Y_i, \hat{Y}_i, \hat{u}_i, \hat{\alpha}, \hat{\beta}$ の関係は以下の通りである。

$$Y_i = \hat{Y}_i + \hat{u}_i$$

$$= \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i + \hat{u}_i$$

残差 \hat{u}_i が必ず含まれることから,

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

として誤差項 (または, 攪乱項) u_i を含め, それを確率変数として考える。

⇒ 確率的モデル

Y_i : 被説明変数, 従属変数

X_i : 説明変数, 独立変数

α, β : 未知母数 (未知パラメータ)

$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$: 推定量 (特に, 最小二乗推定量)

1. 残差 \hat{u}_i は u_i の実現値としてみなすことができる。
2. $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ の性質を統計学的に考察可能となる。

統計学の復習 (統計量, 推定量, 推定値について)

1. 理論標本, 理論観測値

⇒ X_1, X_2, \dots, X_n

⇒ 確率変数

2. 実現された標本, 実現された観測値, 実現値

⇒ x_1, x_2, \dots, x_n

⇒ 数値

1. 理論観測値 X_1, X_2, \dots, X_n の関数 ⇒ 統計量
2. すべての i について, $\mu = E(X_i)$ と仮定する。
3. 母平均 μ の推定に使われる統計量 ⇒ μ の推定量

(a) $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ は μ の推定量

(b) $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ は σ^2 の推定量

4. 実現された標本を用いて実際に計算された推定量の値 ⇒ 推定値

(a) $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ は μ の推定値

(b) $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ は σ^2 の推定値

5. μ や σ^2 の推定量の候補は無数に考えられる。
6. α, β は母数。
7. $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ は α, β の推定量である。

5.1 回帰モデルの仮定

回帰モデル

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

の仮定:

1. X_i は確率変数でないとは定する (固定された値)。
2. すべての i について, $E(u_i) = 0$ とする。
3. すべての i について, $V(u_i) = \sigma^2$ とする。 ($V(u_i) = E(u_i^2) = \sigma^2$ に注意)
4. すべての $i \neq j$ について, $Cov(u_i, u_j) = 0$ とする。 ($Cov(u_i, u_j) = E(u_i u_j) = 0$ に注意)
5. すべての i について, $u_i \sim N(0, \sigma^2)$ とする。
6. $n \rightarrow \infty$ のとき, $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \rightarrow \infty$ とする。

攪乱項 u_1, u_2, \dots, u_n はそれぞれ独立に平均ゼロ, 分散 σ^2 の正規分布する。

再度, まとめて, 回帰モデル:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i, \quad u_i \sim N(0, \sigma^2),$$

ただし,

Y_i : 被説明変数, 従属変数

X_i : 説明変数, 独立変数

α, β, σ^2 : 未知母数 (未知パラメータ)

$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$: 推定量 (特に, 最小二乗推定量)

特に, 回帰直線は,

$$E(Y_i) = \alpha + \beta X_i$$

として解釈される。

5.2 誤差項 (攪乱項) の経済学的意味

1. 経済理論自身が不完全: X 以外にも他の説明変数が必要であるにもかかわらず, それを誤って除いている可能性がある。
2. モデルの定式化が不完全: Y と X との間の線形関係が誤りかもしれない。

3. 理論モデルとデータとの対応：理論モデルで考えられる変数と実際に用いたデータが適当でないかもしれない。例：所得のデータについては国民総生産，国民所得，可処分所得，労働所得…，金利では公定歩合，国債利回り，定期預金金利，全国銀行平均約定金利…
4. 測定上の誤差：経済データは一般的に推計されているため完全ではない。誤差を含む。

5.3 $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ の統計的性質

準備：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

$$\bar{Y} = \alpha + \beta \bar{X} + \bar{u},$$

ただし，

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i,$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i,$$

とする。辺々を引いて，

$$Y_i - \bar{Y} = \beta(X_i - \bar{X}) + (u_i - \bar{u}),$$

を得る。

5.3.1 $\hat{\beta}$ について

β の最小二乗推定量 $\hat{\beta}$ に代入すると，

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) \left(\beta(X_i - \bar{X}) + (u_i - \bar{u}) \right)}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) \left(\beta(X_i - \bar{X}) \right)}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ &\quad + \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(u_i - \bar{u})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ &= \beta + \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})u_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \end{aligned}$$

である。途中の計算で， $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})\bar{u} = 0$ に注意せよ。よって，まとめると，

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ &= \beta + \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})u_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ &= \beta + \sum_{i=1}^n \omega_i u_i, \end{aligned}$$

となる。ただし， $\omega_i = \frac{(X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$ とする。

5.3.2 $\hat{\alpha}$ について

α の最小二乗推定量 $\hat{\alpha}$ については，

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} \\ &= \alpha - (\hat{\beta} - \beta)\bar{X} + \bar{u} \end{aligned}$$

ただし， $\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i$ である。 $\bar{Y} = \alpha + \beta\bar{X} + \bar{u}$ を途中で使う。

5.3.3 $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ の平均

統計学の復習（期待値の公式）：

1. X を確率変数とする。

$$E(a + bX) = a + bE(X),$$

となる。ただし， a, b は定数とする。

2. X_1, X_2, \dots, X_n の n 個の確率変数を考える。このとき，

$$E\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i E(X_i),$$

となる。ただし， c_1, c_2, \dots, c_n は定数とする。

$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ の平均： $\hat{\beta}$ は次のように書き換えられた。

$$\hat{\beta} = \beta + \sum_{i=1}^n \omega_i u_i,$$

の両辺に期待値をとると,

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}) &= E\left(\beta + \sum_{i=1}^n \omega_i u_i\right) \\ &= \beta + \sum_{i=1}^n \omega_i E(u_i) \\ &= \beta, \end{aligned}$$

となり, $\hat{\beta}$ は β の不偏推定量であると言える。

$\hat{\alpha}$ については,

$$\hat{\alpha} = \alpha - (\hat{\beta} - \beta)\bar{X} + \bar{u}$$

を利用して, 辺々に期待値をとると,

$$\begin{aligned} E(\hat{\alpha}) &= \alpha - E(\hat{\beta} - \beta)\bar{X} + E(\bar{u}) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

となる。 $E(\hat{\beta} - \beta) = 0$ に注意。また, $E(\bar{u})$ の計算は以下のとおり。

$$\begin{aligned} E(\bar{u}) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(u_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\hat{\alpha}$ は α の不偏推定量であると言える。

5.3.4 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ の分散

統計学の復習 (分散の公式):

1. X を確率変数とする。

$$V(X) = E(X - \mu)^2,$$

となる。ただし, $\mu = E(X)$ とする。

2. X を確率変数とする。

$$V(a + bX) = V(bX) = b^2 V(X),$$

となる。ただし, a, b は定数とする。

3. X_1, X_2, \dots, X_n の n 個の確率変数は互いに独立とする。このとき,

$$V\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i^2 V(X_i),$$

となる。ただし, c_1, c_2, \dots, c_n は定数とする。

$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ の分散: $\hat{\beta}$ の分散について, $\hat{\beta} = \beta + \sum_{i=1}^n \omega_i u_i$ を用いると,

$$\begin{aligned} V(\hat{\beta}) &= V\left(\beta + \sum_{i=1}^n \omega_i u_i\right) \\ &= V\left(\sum_{i=1}^n \omega_i u_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_i^2 E(u_i^2) \\ &= \sigma^2 \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \end{aligned}$$

誤差項 (または, 攪乱項) の仮定より,

$$V(u_i) = \sigma^2,$$

を用いる。

最後の行は, $\omega_i = \frac{X_i - \bar{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$ に注意して,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \omega_i^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right)^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \end{aligned}$$

を用いる。

よって, $\hat{\beta}$ の平均は β , 分散は $\frac{\sigma^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$ となることが示された。

$\hat{\alpha}$ の分散について, $\hat{\alpha} = \alpha - (\hat{\beta} - \beta)\bar{X} + \bar{u}$ を利用すると,

$$\begin{aligned} V(\hat{\alpha}) &= E(\hat{\alpha} - \alpha)^2 \\ &= E\left(-(\hat{\beta} - \beta)\bar{X} + \bar{u}\right)^2 \\ &= \bar{X}^2 E(\hat{\beta} - \beta)^2 - 2\bar{X}E((\hat{\beta} - \beta)\bar{u}) + E(\bar{u}^2) \\ &= \sigma^2 \left(\frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \end{aligned}$$

途中で，以下の計算が使われる。

$$\begin{aligned}
 & E((\hat{\beta} - \beta)\bar{u}) \\
 &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})u_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i\right) \\
 &= \frac{1}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})u_i \sum_{j=1}^n u_j\right) \\
 &= \frac{1}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (X_i - \bar{X})E(u_i u_j) \\
 &= \frac{1}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \sigma^2 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) = 0$ であることに注意。

$$\begin{aligned}
 E(\bar{u}^2) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i\right)^2 \\
 &= \frac{1}{n^2} E\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i u_j\right) \\
 &= \frac{1}{n^2} E\left(\sum_{i=1}^n u_i^2\right) \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n E(u_i^2) \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 \\
 &= \frac{\sigma^2}{n}
 \end{aligned}$$

よって， $\hat{\alpha}$ の平均は α ，分散は $\frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$ となることが示された。

$\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の共分散について， $\hat{\alpha} = \alpha - (\hat{\beta} - \beta)\bar{X} + \bar{u}$ を利用すると，

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) &= E((\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta)) \\
 &= E((-(\hat{\beta} - \beta)\bar{X} + \bar{u})(\hat{\beta} - \beta)) \\
 &= -E(\hat{\beta} - \beta)^2 \bar{X} + E(\bar{u}(\hat{\beta} - \beta)) \\
 &= -E(\hat{\beta} - \beta)^2 \bar{X} \\
 &= -\frac{\sigma^2 \bar{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}
 \end{aligned}$$

となる。

数値例：

i	Y_i	X_i	$X_i Y_i$	X_i^2
1	6	10	60	100
2	9	12	108	144
3	10	14	140	196
4	10	16	160	256
合計	$\sum Y_i$ 35	$\sum X_i$ 52	$\sum X_i Y_i$ 468	$\sum X_i^2$ 696
平均	\bar{Y} 8.75	\bar{X} 13		

$$\begin{aligned}
 V(\hat{\beta}) &= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\
 &= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2} \\
 &= \frac{\sigma^2}{696 - 4 \times 13^2} \\
 &= \frac{\sigma^2}{20} \\
 &= 0.05\sigma^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V(\hat{\alpha}) &= \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\
 &= \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2)} \\
 &= \frac{\sigma^2 696}{4(696 - 4 \times 13^2)} \\
 &= \frac{696\sigma^2}{80} \\
 &= 8.7\sigma^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) &= -\frac{\sigma^2 \bar{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\
 &= -\frac{\sigma^2 \bar{X}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2} \\
 &= -\frac{13\sigma^2}{696 - 4 \times 13^2} \\
 &= -0.65\sigma^2
 \end{aligned}$$

注意： 最小二乗法を復習すると，まず，次のような関数 $S(\alpha, \beta)$ を定義する。

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n u_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2$$

$S(\alpha, \beta)$ の最小化によって,

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0$$

を満たす α, β が $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ となる。

すなわち, $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ は,

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n X_i(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i) = 0$$

を満たす。

さらに,

$$\sum_{i=1}^n Y_i = n\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$\sum_{i=1}^n X_i Y_i = \hat{\alpha} \sum_{i=1}^n X_i + \hat{\beta} \sum_{i=1}^n X_i^2,$$

行列表示によって,

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix},$$

$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ について, まとめて,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2} \\ & \quad \times \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n X_i^2 & -\sum_{i=1}^n X_i \\ -\sum_{i=1}^n X_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

逆行列の部分と分散, 共分散とは以下のような関係がある。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} V(\hat{\alpha}) & \text{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \\ \text{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) & V(\hat{\beta}) \end{pmatrix} \\ &= \sigma^2 \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{\sigma^2}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2} \\ & \quad \times \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n X_i^2 & -\sum_{i=1}^n X_i \\ -\sum_{i=1}^n X_i & n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum (X_i - \bar{X})^2} & -\frac{\sigma^2 \bar{X}}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \\ -\frac{\sigma^2 \bar{X}}{\sum (X_i - \bar{X})^2} & \frac{\sigma^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5.3.5 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ の分布 (σ^2 が既知の場合)

統計学の復習 (正規分布について):

1. n 個の独立な確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n が同一の分布に従うものとする。このとき,

$$E\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i E(X_i),$$

$$V\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i^2 V(X_i),$$

となる。

2. n 個の独立な確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n が同一の正規分布に従うものとする。このとき,

$$\sum_{i=1}^n c_i X_i \sim N\left(E\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right), V\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)\right)$$

となる。すなわち,

$$\sum_{i=1}^n c_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n c_i E(X_i), \sum_{i=1}^n c_i^2 V(X_i)\right)$$

3. 特に, $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, 標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ を考えると,

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

となる。(すべての i について, $c_i = \frac{1}{n}$ の場合を考えればよい。)

$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ の分布:

1. $\hat{\beta} = \beta + \sum_{i=1}^n \omega_i u_i$
2. $E(\hat{\beta}) = \beta$
3. $V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$

よって,

$$\hat{\beta} \sim N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}\right),$$

となる。

1. $\hat{\alpha} = \alpha - (\hat{\beta} - \beta)\bar{X} + \bar{u}$
2. $E(\hat{\alpha}) = \alpha$
3. $V(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \left(\frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} + \frac{1}{n} \right)$

よって,

$$\hat{\alpha} \sim N \left(\alpha, \sigma^2 \left(\frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} + \frac{1}{n} \right) \right),$$

となる。

5.3.6 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ の性質：最良線型不偏性と一致性

統計学の復習 (推定量の望ましい性質)： $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ の性質を求めるために

1. 不偏性：

ある母集団のある母数 θ に対して, θ の推定量として $\hat{\theta}$ を考える。

このとき,

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

となるとき, $\hat{\theta}$ は θ の不偏推定量であると言う。

$\hat{\theta}$ は不偏性を持つと言う。

$E(\hat{\theta}) - \theta$ は偏りと定義される。

(a) 標本平均 \bar{X} は μ の不偏推定量である。

証明：

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu \\ &= \mu \end{aligned}$$

このように, $E(\bar{X}) = \mu$ なので, 標本平均 \bar{X} は μ の不偏推定量となる。

2. 有効性 (最小分散性)：

ある母数 θ に対して, $\hat{\theta}_1$ と $\hat{\theta}_2$ の 2 つの不偏推定量を考える。

このとき, $V(\hat{\theta}_1) \leq V(\hat{\theta}_2)$ が成り立つとき, $\hat{\theta}_1$ は $\hat{\theta}_2$ より有効であると言う。

ある母数 θ に対して, 可能なすべての不偏推定量を考え, $\hat{\theta}$ が最も小さな分散を持つ不偏推定量であるとする。

このとき, $\hat{\theta}$ を最小分散不偏推定量, または, 最良不偏推定量と言う。

(a) 推定量 $\sum_{i=1}^n c_i X_i$ の中で, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ が最も小さな分散を持つ推定量となる。

⇒ 最良線型不偏推定量

3. 一致性：

ある母数 θ について推定量 $\hat{\theta}$ を考える。 n 個の標本から構成された推定量を $\hat{\theta}^{(n)}$ と定義する。

数列 $\hat{\theta}^{(1)}, \hat{\theta}^{(2)}, \dots, \hat{\theta}^{(n)}, \dots$ を考える。

十分大きな n について, $\hat{\theta}^{(n)}$ が θ に確率的に収束するとき, $\hat{\theta}$ は θ の一致推定量であると言う。

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta} = \theta$$

と表現する。

(a) 平均二乗誤差 MSE について：

定義：

$$\text{MSE}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2$$

式の展開：

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\hat{\theta}) &= E(\hat{\theta} - \theta)^2 \\ &= E\left((\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) - (E(\hat{\theta}) - \theta)\right)^2 \\ &= E\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right)^2 \\ &\quad - 2E\left((\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta)\right) \\ &\quad + E(E(\hat{\theta}) - \theta)^2 \\ &= V(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2 \end{aligned}$$

途中で, $E(E(\hat{\theta}) - \theta)^2 = (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$ と

$$E\left((\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta)\right)$$

$$= (\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta) \mathbb{E}(\hat{\theta} - \mathbb{E}(\hat{\theta}))$$

$$= 0$$

が使われている。 $\mathbb{E}(\hat{\theta} - \mathbb{E}(\hat{\theta})) = 0$ である。

$\mathbb{E}(\hat{\theta})$ や θ は確率変数ではないことに注意せよ。

- (b) $\hat{\theta}$ が θ の不偏推定量であれば, $\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta$ となるので,

$$\text{MSE}(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta})$$

を得る。

- (c) 確率的に収束 $\implies n \rightarrow \infty$ のとき, $\text{MSE}(\hat{\theta}) \rightarrow 0$ となること。
- (d) $n \rightarrow \infty$ のとき, $\text{MSE}(\hat{\theta}) \rightarrow 0$ が成り立てば, $\hat{\theta}$ は θ の一致推定量である。
- (e) μ の推定量 \bar{X} を調べる。

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \mu$$

なので,

$$\text{MSE}(\bar{X}) = V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

となる。 $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\text{MSE}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \rightarrow 0$$

となるので, \bar{X} は μ の一致推定量であると言える。

$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ の最良線型不偏性と一致性

不偏性: 既に証明したとおり, $\mathbb{E}(\hat{\beta}) = \beta, \mathbb{E}(\hat{\alpha}) = \alpha$ なので, $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ は β, α の不偏推定量である。

最良線型不偏性: $\hat{\beta}$ を変形すると以下の通りとなる。

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})Y_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

$$= \sum_{i=1}^n \omega_i Y_i$$

ただし, $\omega_i = \frac{(X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$ とする。このように, $\hat{\beta}$ は線型不偏推定量であると言える。

別の線型不偏推定量を次のように考える。

$$\tilde{\beta} = \sum_{i=1}^n c_i Y_i$$

ただし, $c_i = \omega_i + d_i$ とする。 $\tilde{\beta}$ もまた β の不偏推定量と仮定したので,

$$\tilde{\beta} = \sum_{i=1}^n c_i Y_i$$

$$= \sum_{i=1}^n (\omega_i + d_i)(\alpha + \beta X_i + u_i)$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^n \omega_i + \beta \sum_{i=1}^n \omega_i X_i + \sum_{i=1}^n \omega_i u_i$$

$$+ \alpha \sum_{i=1}^n d_i + \beta \sum_{i=1}^n d_i X_i + \sum_{i=1}^n d_i u_i$$

$$= \beta + \alpha \sum_{i=1}^n d_i + \beta \sum_{i=1}^n d_i X_i$$

$$+ \sum_{i=1}^n \omega_i u_i + \sum_{i=1}^n d_i u_i$$

と変形される。 $\sum_{i=1}^n \omega_i = 0, \sum_{i=1}^n \omega_i X_i = 1$ に注意。よって, 期待値をとると,

$$\mathbb{E}(\tilde{\beta}) = \beta + \alpha \sum_{i=1}^n d_i + \beta \sum_{i=1}^n d_i X_i$$

$$+ \sum_{i=1}^n \omega_i \mathbb{E}(u_i) + \sum_{i=1}^n d_i \mathbb{E}(u_i)$$

$$= \beta + \alpha \sum_{i=1}^n d_i + \beta \sum_{i=1}^n d_i X_i$$

となる。 $\tilde{\beta}$ が不偏であるためには,

$$\sum_{i=1}^n d_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n d_i X_i = 0,$$

の条件が必要となる。

この2つの条件が成り立っていると仮定すると,

$$\tilde{\beta} = \beta + \sum_{i=1}^n (\omega_i + d_i) u_i$$

を利用して,

$$V(\tilde{\beta}) = \mathbb{E}(\tilde{\beta} - \beta)^2$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n (\omega_i + d_i) u_i\right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n (\omega_i + d_i)^2 E(u_i^2) \\
&= \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^n \omega_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \omega_i d_i + \sum_{i=1}^n d_i^2 \right) \\
&= \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^n \omega_i^2 + \sum_{i=1}^n d_i^2 \right)
\end{aligned}$$

$\tilde{\beta}$ の不偏性の条件 $\sum_{i=1}^n d_i = 0$, $\sum_{i=1}^n d_i X_i = 0$ を利用すると,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \omega_i d_i &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) d_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n X_i d_i - \bar{X} \sum_{i=1}^n d_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = 0
\end{aligned}$$

を得る。

まとめると, $\tilde{\beta}$ の分散は,

$$V(\tilde{\beta}) = \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^n \omega_i^2 + \sum_{i=1}^n d_i^2 \right)$$

となる。 $\hat{\beta}$ の分散は,

$$V(\hat{\beta}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n \omega_i^2$$

なので,

$$V(\tilde{\beta}) \geq V(\hat{\beta})$$

となる。等号が成り立つときは, $\sum_{i=1}^n d_i^2 = 0$, すなわち, $d_1 = d_2 = \dots = d_n = 0$ のときとなり, これは $\hat{\beta}$ に一致する。

よって, $\hat{\beta}$ は最小分散線型不偏推定量, または, 最良線型不偏推定量であると言える。

⇒ ガウス=マルコフの定理

$\hat{\alpha}$ についても, 同様で, α の最小分散線型不偏推定量となる。

証明は,

$$\hat{\alpha} - \alpha = -(\hat{\beta} - \beta)\bar{X} + \bar{u}$$

を利用すればよい。

推定量の関係 ⇒

最小分散 (最良) 線型不偏推定量 ⊂ 線型不偏推定量 ⊂ 線型推定量 ⊂ 全推定量

一致性: n が大きくなると, $\hat{\beta}$ は β に近づくかどうかを調べる。

$$\begin{aligned}
\text{MSE}(\hat{\beta}) &= V(\hat{\beta}) \\
&= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}
\end{aligned}$$

$\hat{\beta}$ は不偏であるので, $\text{MSE}(\hat{\beta}) = V(\hat{\beta})$ となる。

$n \rightarrow \infty$ のとき, $\text{MSE}(\hat{\beta}) \rightarrow 0$ となれば, $\hat{\beta}$ は β の一致推定量となる。

最小二乗法の仮定の一つに「 $n \rightarrow \infty$ のとき, $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \rightarrow \infty$ 」というものがあった。この仮定は「 $n \rightarrow \infty$ のとき, $\text{MSE}(\hat{\beta}) \rightarrow 0$ 」を保証する。よって, $\hat{\beta}$ は β の一致推定量である。

$\hat{\alpha}$ についても, 同様に,

$$\text{MSE}(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right)$$

となり, 「 $n \rightarrow \infty$ のとき, $\text{MSE}(\hat{\alpha}) \rightarrow 0$ 」となるので, $\hat{\alpha}$ も α の一致推定量であると言える。

5.4 誤差項 (または, 攪乱項) u_i の分散 σ^2 について

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

誤差項 (または, 攪乱項) の仮定: $u_i \sim N(0, \sigma^2)$

$$Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \hat{u}_i,$$

u_i の分散 σ^2 の不偏推定量:

$$\frac{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}{\text{自由度}}$$

$$\begin{aligned}
\text{自由度} &= \text{標本数 } (n) - \text{推定すべき係数値の数 } (2) \\
&= n - 2
\end{aligned}$$

誤差項 (または, 攪乱項) の母分散 σ^2 の不偏推定量 s^2 は,

$$s^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i)^2,$$

によって与えられる。

s^2 の不偏性の証明： まず，次のように書き直す。

$$\begin{aligned} u_i &= Y_i - \alpha - \beta X_i \\ &= (\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \hat{u}_i) - \alpha - \beta X_i \\ &= (\hat{\alpha} - \alpha) + (\hat{\beta} - \beta) X_i + \hat{u}_i, \end{aligned}$$

両辺を二乗する。

$$\begin{aligned} u_i^2 &= (\hat{\alpha} - \alpha)^2 + (\hat{\beta} - \beta)^2 X_i^2 + \hat{u}_i^2 \\ &\quad + 2(\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta) X_i \\ &\quad + 2(\hat{\alpha} - \alpha)\hat{u}_i \\ &\quad + 2(\hat{\beta} - \beta) X_i \hat{u}_i \end{aligned}$$

総和をとる。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u_i^2 &= n(\hat{\alpha} - \alpha)^2 + (\hat{\beta} - \beta)^2 \sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 \\ &\quad + 2(\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta) \sum_{i=1}^n X_i \\ &\quad + 2(\hat{\alpha} - \alpha) \sum_{i=1}^n \hat{u}_i \\ &\quad + 2(\hat{\beta} - \beta) \sum_{i=1}^n X_i \hat{u}_i \\ &= n(\hat{\alpha} - \alpha)^2 + (\hat{\beta} - \beta)^2 \sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 \\ &\quad + 2n(\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta)\bar{X} \end{aligned}$$

期待値をとる。

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^n u_i^2\right) &= nE(\hat{\alpha} - \alpha)^2 + E(\hat{\beta} - \beta)^2 \sum_{i=1}^n X_i^2 \\ &\quad + E\left(\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2\right) + 2nE((\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta))\bar{X} \\ n\sigma^2 &= \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} + \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ &\quad + E\left(\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2\right) - \frac{2n\sigma^2 \bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ &= 2\sigma^2 \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right) + E\left(\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2\right) \\ &= 2\sigma^2 + E\left(\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2\right) \end{aligned}$$

途中の計算には以下が使われる。

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^n u_i^2\right) &= n\sigma^2 \\ E(\hat{\alpha} - \alpha)^2 &= \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ E(\hat{\beta} - \beta)^2 &= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ E((\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta)) &= -\frac{\sigma^2 \bar{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \end{aligned}$$

よって，

$$E(s^2) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}{n-2}\right) = \sigma^2$$

を得る。すなわち， s^2 は σ^2 の不偏推定量である。

統計学の復習 (χ^2 分布)： m 個の確率変数 Z_1, Z_2, \dots, Z_m は，互いに独立な標準正規分布に従うものとする。このとき， $Y = \sum_{i=1}^m Z_i^2$ は，自由度 m の χ^2 分布に従う。

$Y \sim \chi^2(m)$ ，または， $Y \sim \chi_m^2$ と表記する。

χ^2 (カイ二乗) 分布表から確率を求める。

$Y \sim \chi^2(m)$ のとき， $E(Y) = m$ ， $V(Y) = 2m$ となる。(証明略)

- 2 つの独立な χ^2 分布からの確率変数 X, Y を考える。 $X \sim \chi^2(n)$ ， $Y \sim \chi^2(m)$ とする。このとき， $Z = X + Y \sim \chi^2(n+m)$ となる。(証明略)
- n 個の独立な確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n が同一の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うものとする。
- $\frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ なので， $\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$ となる。
 $\frac{X_1 - \mu}{\sigma}, \frac{X_2 - \mu}{\sigma}, \dots, \frac{X_n - \mu}{\sigma}$ はそれぞれ独立なので，

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$$

となる。

- μ を \bar{X} に置き換えると，

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$$

となる。(証明は後述)

さらに,

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

を定義すると,

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

となる。 S^2 は σ^2 の不偏推定量である (後述)。

5. すなわち,

$$E\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = n-1,$$

$$V\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = 2(n-1),$$

となる。

回帰分析に当てはめる。

$$\frac{\sum_{i=1}^n u_i^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n),$$

α, β を推定値に置き換えると,

$$\frac{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2),$$

となる。さらに,

$$s^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i)^2,$$

なので,

$$\frac{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}{\sigma^2} = \frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2),$$

を得る。

s^2 の一致性の証明: s^2 は

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 \\ &= \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i)^2 \end{aligned}$$

と定義される。

$\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$ なので (証明略),

$$E\left(\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2}\right) = n-2,$$

$$V\left(\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2}\right) = 2(n-2),$$

となる。さらに, 書き直すと,

$$\frac{(n-2)^2}{\sigma^4} V(s^2) = 2(n-2),$$

$$V(s^2) = \frac{2\sigma^4}{n-2},$$

を得る。 $MSE(s^2) = V(s^2)$ となるので、「 $n \rightarrow \infty$ のとき, $MSE(s^2) \rightarrow 0$ 」が言えるので, s^2 は σ^2 の一致推定量である。

標準誤差について: 標準誤差 = 不偏分散の平方根
誤差項 (または, 攪乱項) の標準誤差 s

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}{n-2}}$$

数値例: $\hat{\alpha} = 0.3, \hat{\beta} = 0.65$ なので, $\hat{Y}_i = 0.3 + 0.65X_i$,
 $\hat{u}_i = Y_i - 0.3 - 0.65X_i$ により, \hat{Y}_i, \hat{u}_i を計算する。

i	Y_i	X_i	$X_i Y_i$	X_i^2	\hat{Y}_i	\hat{u}_i
1	6	10	60	100	6.8	-0.8
2	9	12	108	144	8.1	0.9
3	10	14	140	196	9.4	0.6
4	10	16	160	256	10.7	-0.7
合計	$\sum Y_i$ 35	$\sum X_i$ 52	$\sum X_i Y_i$ 468	$\sum X_i^2$ 696	$\sum \hat{Y}_i$ 35	$\sum \hat{u}_i$ 0
平均	\bar{Y} 8.75	\bar{X} 13				

誤差項 (または, 攪乱項) の母分散 σ^2 の不偏推定量 s^2 は,

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 \\ &= \frac{1}{2} ((-0.8)^2 + 0.9^2 + 0.6^2 + (-0.7)^2) \\ &= 1.15 \end{aligned}$$

によって与えられる。

s は「回帰の標準誤差 (Standard Error of Regression)」と呼ばれ, この例では, $s = \sqrt{1.15} = 1.07$ となる。

5.4.1 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ の分散の不偏推定量

$\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の分散は,

$$V(\hat{\alpha}) = \sigma_{\hat{\alpha}}^2 = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

$$V(\hat{\beta}) = \sigma_{\hat{\beta}}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

によって, 与えられる。

σ^2 をその不偏分散 s^2 に置き換えることによって, $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ の分散の不偏推定量を次のように得ることができる。

$$s_{\hat{\alpha}}^2 = \frac{s^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

$$s_{\hat{\beta}}^2 = \frac{s^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

さらに, 平方根をとって, $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ の標準誤差はそれぞれ,

$$s_{\hat{\alpha}} = s \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}$$

$$s_{\hat{\beta}} = \frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}$$

として与えられる。

数値例: $\hat{\alpha} = 0.3, \hat{\beta} = 0.65$ なので, $\hat{Y}_i = 0.3 + 0.65X_i$, $\hat{u}_i = Y_i - 0.3 - 0.65X_i$ により, \hat{Y}_i, \hat{u}_i を計算する。

i	Y_i	X_i	$X_i Y_i$	X_i^2	\hat{Y}_i	\hat{u}_i
1	6	10	60	100	6.8	-0.8
2	9	12	108	144	8.1	0.9
3	10	14	140	196	9.4	0.6
4	10	16	160	256	10.7	-0.7
合計	$\sum Y_i$ 35	$\sum X_i$ 52	$\sum X_i Y_i$ 468	$\sum X_i^2$ 696	$\sum \hat{Y}_i$ 35	$\sum \hat{u}_i$ 0
平均	\bar{Y} 8.75	\bar{X} 13				

$s^2 = 1.15$ なので,

$$\begin{aligned} s_{\hat{\beta}}^2 &= \frac{s^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ &= \frac{s^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2} \\ &= 0.05 \times 1.15 \\ &= 0.0575 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{\hat{\alpha}}^2 &= \frac{s^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ &= \frac{s^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2)} \\ &= 8.7 \times 1.15 \\ &= 10.005 \end{aligned}$$

$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ の標準誤差はそれぞれ, 平方根をとって,

$$s_{\hat{\beta}} = \sqrt{0.0575} = 0.240$$

$$s_{\hat{\alpha}} = \sqrt{10.005} = 3.163$$

となる。

5.5 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ の分布

5.5.1 統計学の復習 (t 分布)

正規分布の重要な定理: n 個の独立な確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n が同一の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うものとする。このとき,

$$\sum_{i=1}^n c_i X_i \sim N\left(\mu \sum_{i=1}^n c_i, \sigma^2 \sum_{i=1}^n c_i^2\right)$$

となる。ただし, c_1, c_2, \dots, c_n は定数とする。

t 分布: Z を標準正規分布, Y を自由度 m の χ^2 分布に従い, 両者は独立な確率変数とする。このとき, $U = \frac{Z}{\sqrt{Y/m}}$

は, 自由度 m の t 分布に従う。

$U \sim t(m)$, または, $U \sim t_m$ と表記する。

$U \sim t(m)$ のとき, $m > 1$ について $E(U) = 0$, $m > 2$ について $V(U) = \frac{m}{m-2}$ となる。(証明略)

t 分布表から確率を求める。(表 2 を見よ)

1. ゼロを中心に左右対称。($E(U) = 0$)
2. t 分布は, 標準正規分布より裾野の広い分布 (なぜなら, $V(U) = \frac{m}{m-2} > 1$)
3. $m \rightarrow \infty$ のとき, $t(m) \rightarrow N(0, 1)$ となる。(期待値は $m > 1$ について $E(U) = 0$, 分散は $V(U) = \frac{m}{m-2} \rightarrow 1$)

標本平均 \bar{X} の分布： X_1, X_2, \dots, X_n の n 個の確率変数は、互いに独立で、平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布に従うものとする。

1. $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ なので、 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ となる。
2. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ である。
(証明は略)
3. $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ と $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ は独立。(証明は略)
すなわち、 \bar{X} と S^2 は独立。
4. したがって、

$$\frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} / n - 1}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

を得る。

重要な結果は、

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

ただし、 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 、 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ である。

σ^2 を S^2 に置き換えると、正規分布から t 分布になる。

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \implies \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

5.5.2 $\hat{\beta}$ について：

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \beta + \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})u_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ &= \beta + \sum_{i=1}^n \omega_i u_i \end{aligned}$$

$u_i \sim N(0, \sigma^2)$ で、かつ、それぞれ独立に分布する。また、 $\hat{\beta}$ の平均、分散はそれぞれ、

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}) &= \beta, \\ V(\hat{\beta}) &= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, \end{aligned}$$

となるので、

$$\hat{\beta} \sim N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}\right),$$

を得る。変形すると、

$$\frac{\hat{\beta} - \beta}{\sigma/\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} \sim N(0, 1),$$

となる。

さらに、

$$\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2),$$

となり (証明略)、 $\hat{\beta}$ とは独立なので (証明略)、

$$\begin{aligned} &\frac{\frac{\hat{\beta} - \beta}{\sigma/\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}}{\sqrt{\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} / (n-2)}} \\ &= \frac{\hat{\beta} - \beta}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} \sim t(n-2) \end{aligned}$$

5.5.3 $\hat{\alpha}$ について：

また、 $\hat{\alpha}$ の平均、分散はそれぞれ、

$$\begin{aligned} E(\hat{\alpha}) &= \alpha, \\ V(\hat{\alpha}) &= \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, \end{aligned}$$

となるので、

$$\hat{\alpha} \sim N\left(\alpha, \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}\right),$$

を得る。変形すると、

$$\frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2 / \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} \sim N(0, 1),$$

となる。

さらに、 σ を s で置き換えると、

$$\frac{\hat{\alpha} - \alpha}{s\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2 / \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} \sim t(n-2),$$

となる。

5.5.4 自由度が $n - 2$ の直感的な理由 :

誤差項 u_i を変形する。

$$\begin{aligned} \frac{\sum u_i^2}{\sigma^2} &= \frac{\sum (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2}{\sigma^2} \\ &= \frac{\sum (Y_i - \hat{Y}_i + \hat{Y}_i - \alpha - \beta X_i)^2}{\sigma^2} \\ &= \frac{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sigma^2} + \frac{\sum (\hat{Y}_i - \alpha - \beta X_i)^2}{\sigma^2} \\ &= \frac{\sum \hat{u}_i^2}{\sigma^2} + \frac{\sum ((\hat{\alpha} - \alpha) - (\hat{\beta} - \beta)X_i)^2}{\sigma^2}, \end{aligned}$$

最小二乗法の導出時の正規方程式から,

$$\sum \hat{u}_i ((\hat{\alpha} - \alpha) - (\hat{\beta} - \beta)X_i) = 0$$

に注意せよ。

$$\frac{\sum u_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n) \text{ と } \frac{\sum ((\hat{\alpha} - \alpha) - (\hat{\beta} - \beta)X_i)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2) \text{ から}$$

$$\sum \frac{\hat{u}_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n - 2)$$

となる。(詳しい証明は省略)

5.5.5 まとめ :

$$\frac{\hat{\beta} - \beta}{s_{\hat{\beta}}} = \frac{\hat{\beta} - \beta}{s / \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} \sim t(n - 2),$$

$$\frac{\hat{\alpha} - \alpha}{s_{\hat{\alpha}}} = \frac{\hat{\alpha} - \alpha}{s \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}} \sim t(n - 2),$$

5.6 α, β の区間推定 (信頼区間)

5.6.1 統計学の復習 : 区間推定 (信頼区間)

\bar{X} の分布を利用して, μ の信頼区間を求める。

1. \bar{X} の分布は以下の通り。

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n - 1)$$

となる。

2. $t_{\alpha/2}(n - 1), t_{1-\alpha/2}(n - 1)$ を自由度 $n - 1$ の t 分布の上から $100 \times \frac{\alpha}{2} \%$ 点, $100 \times (1 - \frac{\alpha}{2}) \%$ 点の値とする。このとき,

$$\text{Prob}\left(t_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1 - \alpha$$

となる。ただし, 自由度と α が決まれば, $t_{\alpha/2}(n - 1), t_{1-\alpha/2}(n - 1)$ は t 分布表から得られる。

3. t 分布は左右対称なので,

$$t_{1-\alpha/2}(n - 1) = -t_{\alpha/2}(n - 1)$$

$$t_{\alpha/2}(n - 1) = |t_{1-\alpha/2}(n - 1)|$$

$$t_{1-\alpha/2}(n - 1) = -|t_{\alpha/2}(n - 1)|$$

となる。

4. 書き直して,

$$\begin{aligned} \text{Prob}\left(\bar{X} - t_{\alpha/2}(n - 1) \frac{S}{\sqrt{n}} \right. \\ \left. < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2}(n - 1) \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \end{aligned}$$

となる。

5. μ が区間 $(\bar{X} - t_{\alpha/2}(n - 1) \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2}(n - 1) \frac{S}{\sqrt{n}})$ にある確率は $1 - \alpha$ である。

6. 推定量 \bar{X}, S^2 をその推定値 \bar{x}, s^2 で置き換える。ただし, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ とする。

7. 区間 $(\bar{x} - t_{\alpha/2}(n - 1) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2}(n - 1) \frac{s}{\sqrt{n}})$ を信頼係数 $1 - \alpha$ の信頼区間といい, $\bar{x} - t_{\alpha/2}(n - 1) \frac{s}{\sqrt{n}}$ を信頼下限, $\bar{x} + t_{\alpha/2}(n - 1) \frac{s}{\sqrt{n}}$ を信頼上限と呼ぶ。

5.6.2 α, β の区間推定 (信頼区間)

$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ の分布は, 以下のように得られた。

$$\frac{\hat{\beta} - \beta}{s_{\hat{\beta}}} \sim t(n - 2),$$

$$\frac{\hat{\alpha} - \alpha}{s_{\hat{\alpha}}} \sim t(n - 2),$$

$t_{\alpha/2}(n - 2), t_{1-\alpha/2}(n - 2)$ をそれぞれ自由度 $n - 2$ の t 分布の上側から $100 \times \frac{\alpha}{2} \%$ 点, $100 \times (1 - \frac{\alpha}{2}) \%$ 点の値とする。このとき,

$$\text{Prob}\left(t_{1-\alpha/2}(n-2) < \frac{\hat{\beta} - \beta}{s_{\hat{\beta}}} < t_{\alpha/2}(n-2)\right) = 1 - \alpha,$$

すなわち, $t_{1-\alpha/2}(n-2) = -t_{\alpha/2}(n-2)$ により,

$$\text{Prob}\left(-t_{\alpha/2}(n-2) < \frac{\hat{\beta} - \beta}{s_{\hat{\beta}}} < t_{\alpha/2}(n-2)\right) = 1 - \alpha,$$

となる。ただし, 自由度と α が決まれば, $t_{\alpha/2}(n-2)$ は t 分布表から得られる。

書き直して,

$$\text{Prob}\left(\hat{\beta} - t_{\alpha/2}(n-2)s_{\hat{\beta}} < \beta < \hat{\beta} + t_{\alpha/2}(n-2)s_{\hat{\beta}}\right) = 1 - \alpha,$$

と表される。

したがって, 信頼係数 $1 - \alpha$ の β の信頼区間は,

$$\hat{\beta} - t_{\alpha/2}(n-2)s_{\hat{\beta}} < \beta < \hat{\beta} + t_{\alpha/2}(n-2)s_{\hat{\beta}},$$

となる。

同様に, 信頼係数 $1 - \alpha$ の α の信頼区間は,

$$\hat{\alpha} - t_{\alpha/2}(n-2)s_{\hat{\alpha}} < \alpha < \hat{\alpha} + t_{\alpha/2}(n-2)s_{\hat{\alpha}},$$

となる。

数値例: 今までと同様に, 以下の数値例をとりあげる。

i	Y_i	X_i
1	6	10
2	9	12
3	10	14
4	10	16

回帰モデル $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ を推定した結果, 以下の推定値を得た。

$$\hat{\beta} = 0.65,$$

$$\hat{\alpha} = 0.3,$$

$$s_{\hat{\beta}} = \sqrt{0.0575} = 0.240,$$

$$s_{\hat{\alpha}} = \sqrt{10.005} = 3.163,$$

$t_{0.025}(2) = 4.303$ なので, 信頼係数 0.95 の β の信頼区間は,

$$0.65 - 4.303 \times 0.240 < \beta < 0.65 + 4.303 \times 0.240,$$

となり (すなわち, $-0.383 < \beta < 1.683$), 信頼係数 0.95 の α の信頼区間は,

$$0.3 - 4.303 \times 3.163 < \alpha < 0.3 + 4.303 \times 3.163,$$

となる (すなわち, $-13.31 < \alpha < 13.91$)。

同様にして, 信頼係数 0.90 の β の信頼区間は,

$$0.65 - 2.920 \times 0.240 < \beta < 0.65 + 2.920 \times 0.240,$$

となり (すなわち, $-0.051 < \beta < 1.051$), 信頼係数 0.95 の α の信頼区間は,

$$0.3 - 2.920 \times 3.163 < \alpha < 0.3 + 2.920 \times 3.163,$$

となる (すなわち, $-8.94 < \alpha < 9.24$)。

5.7 α, β の仮説検定

5.7.1 統計学の復習: 仮説検定

\bar{X} の分布を利用して, μ の仮説検定を行う。

1. 帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$

対立仮説 $H_1: \mu \neq \mu_0$

2. 帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ が正しいもとでの分布は,

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

となる。

3. $\text{Prob}\left(t_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1 - \alpha$
 $t_{\alpha/2}(n-1), t_{1-\alpha/2}(n-1)$ をそれぞれ自由度 $n-1$ の t 分布の上から $100 \times \frac{\alpha}{2} \%$ 点, $100 \times \frac{1-\alpha}{2} \%$ 点の値とする。

自由度と α が決まれば, $t_{\alpha/2}(n-1), t_{1-\alpha/2}(n-1)$ は t 分布表から得られる。

4. α を有意水準と呼ぶ。慣習的に $\alpha = 0.01, 0.05$ が使われる。

5. $-t_{\alpha/2}(n-1) > \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$, または,

$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_{\alpha/2}(n-1)$ ならば, 帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ は, 分布の端にあり, 起こりにくいと考える。

\implies 有意水準 α で帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ を棄却する。

6. 実際の検定手続：

(a) \bar{X}, S^2 を実績値で置き換えて，

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

を得る。

$$\text{ただし, } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

とする。

(b) $-t_{\alpha/2}(n-1) > \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ ，または，

$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_{\alpha/2}(n-1)$ ならば，有意水準 α で帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ を棄却する。

3. t 分布表から得られた $100 \times \alpha$ % 点の値と検定統計値の大きさを比較する。すなわち，

$$-t_{\alpha/2}(n-2) > \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}},$$

または，

$$\frac{\hat{\beta} - \beta_0}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} > t_{\alpha/2}(n-2)$$

ならば，有意水準 α で帰無仮説 $H_0: \beta = \beta_0$ を棄却する。

帰無仮説 $H_0: \beta = \beta_0$ を中心とした分布を考えると，データから得られた検定統計量は，分布の端にあり，確率的に起こりにくいと考える。

となる。

定数項の推定量 $\hat{\alpha}$ についても同様。

5.7.2 α, β の仮説検定

「帰無仮説： $H_0: \beta = \beta_0$ ，対立仮説： $H_1: \beta \neq \beta_0$ 」の検定を行う。

帰無仮説： $H_0: \beta = \beta_0$ が正しいとするもとでは，

$$\frac{\hat{\beta} - \beta_0}{s_{\hat{\beta}}} = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} \sim t(n-2),$$

の分布に従う。

よって，検定の手順は，

1. 検定統計値

$$\frac{\hat{\beta} - \beta_0}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}$$

を計算する。

ただし，

$$s^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i)^2,$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2},$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X},$$

とする。

2. 有意水準 α を決めて (この α は，回帰式の定数項の α とは異なることに注意)， t 分布表から $100 \times \alpha$ % 点の値を求める。通常， $\alpha = 0.01, 0.05$ とする。

5.7.3 t 値について

特に，「帰無仮説： $H_0: \beta = 0$ ，対立仮説： $H_1: \beta \neq 0$ 」の検定は特別の意味を持つ。

帰無仮説のもとでは，

$$\frac{\hat{\beta}}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} \sim t(n-2)$$

の分布に従う。

このときの t 統計量の値 (すなわち， $\frac{\hat{\beta}}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}$)

を t 値と呼ぶ。

回帰式

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

において，帰無仮説 $H_0: \beta = 0$ は，「 X_i が Y_i に何の影響も与えない」ということを意味する。

有意水準 α のもとで (この α は，回帰式の定数項の α とは異なることに注意)，

$$-t_{\alpha/2}(n-2) > \frac{\hat{\beta}}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}},$$

または,

$$\frac{\hat{\beta}}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} > t_{\alpha/2}(n-2)$$

ならば, 有意水準 α で帰無仮説 $H_0: \beta = 0$ を棄却する。

1. 回帰モデル

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

において, 経済理論から $\beta > 0$ という符号条件が想定されたとする。

2. 有意水準 α を決める。(例えば, $\alpha = 0.05, 0.01$)

3. 実際のデータから, $\hat{\beta} > 0$ が得られた場合

(a) t 値が,

$$\frac{\hat{\beta}}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} > t_{\alpha/2}(n-2)$$

となった場合, 帰無仮説 $H_0: \beta = 0$ が棄却され, $\beta > 0$ が統計的にも証明され, 経済理論は現実経済をサポートする結果。

(b) t 値が,

$$\frac{\hat{\beta}}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} < t_{\alpha/2}(n-2)$$

となった場合, 帰無仮説 $H_0: \beta = 0$ を棄却できず, $\hat{\beta} > 0$ にもかかわらず, $\beta < 0$ の可能性もあるため, 経済理論が現実経済を積極的には支持しない。

4. 実際のデータから, $\hat{\beta} < 0$ が得られた場合

(a) t 値が,

$$-t_{\alpha/2}(n-2) > \frac{\hat{\beta}}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}},$$

となった場合, 帰無仮説 $H_0: \beta = 0$ を棄却できず, $\hat{\beta} < 0$ にもかかわらず, $\beta > 0$ の可能性もあるため, 得られた推定結果と経済理論は完全に矛盾しているとは言えない。

(b) t 値が,

$$-t_{\alpha/2}(n-2) < \frac{\hat{\beta}}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}},$$

となった場合, 帰無仮説 $H_0: \beta = 0$ は棄却され, 統計的には $\beta < 0$ となり, 得られた推定結果と経済理論は完全に矛盾している。すなわち, この場合, 経済理論の立て直しが必要。

数値例: 今までと同様に, 以下の数値例をとりあげる。

i	Y_i	X_i
1	6	10
2	9	12
3	10	14
4	10	16

回帰モデル $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ を推定した結果, 以下の推定値を得た。

$$\hat{\beta} = 0.65,$$

$$s_{\hat{\beta}} = \sqrt{0.0575} = 0.240,$$

帰無仮説 $H_0: \beta = 0$, 対立仮説 $H_0: \beta \neq 0$ の検定を行う。 t 値は $0.65/0.240 = 2.711$, 有意水準 5% の $t_{\alpha/2}(n-2)$ の値は 4.303 となり ($\alpha = 0.05, n = 4$),

$$\frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}} = \frac{0.65}{\sqrt{0.0575}} = 2.708 < t_{\alpha/2}(n-2) = 4.303$$

を得る。このように, 有意水準 5% で帰無仮説 $H_0: \beta = 0$ は棄却されない。よって, β の符号は統計学的に確定できない。

また, α についても同様に, t 値を計算できる。

$$\hat{\alpha} = 0.3,$$

$$s_{\hat{\alpha}} = \sqrt{10.005} = 3.163,$$

なので, t 値は,

$$\frac{\hat{\alpha}}{s_{\hat{\alpha}}} = \frac{0.3}{\sqrt{10.005}} = 0.095 < t_{\alpha/2}(n-2) = 4.303,$$

となり, 有意水準 5% で $H_0: \alpha = 0$ を棄却できない。しかし, 定数項については, 経済学的意味が無い場合が多い。

推定結果の表記方法： 回帰モデル：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

の推定の結果， $\hat{\alpha} = 0.3$ ， $\hat{\beta} = 0.65$ ， $s_{\hat{\alpha}} = \sqrt{10.0005} = 3.163$ ， $s_{\hat{\beta}} = \sqrt{0.0575} = 0.240$ ， $\frac{\hat{\alpha}}{s_{\hat{\alpha}}} = 0.095$ ， $\frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}} = 2.708$ ， $s^2 = 1.15$ （すなわち， $s = 1.07$ ）， $R^2 = 0.786$ を得た。これらをまとめて，

$$Y_i = \begin{matrix} 0.3 \\ (0.095) \end{matrix} + \begin{matrix} 0.65 \\ (2.708) \end{matrix} X_i,$$

$$R^2 = 0.786, \quad s = 1.07,$$

ただし，係数の推定値の下の括弧内は t 値を表すものとする。

または，

$$Y_i = \begin{matrix} 0.3 \\ (3.163) \end{matrix} + \begin{matrix} 0.65 \\ (0.240) \end{matrix} X_i,$$

$$R^2 = 0.786, \quad s = 1.07,$$

ただし，係数の推定値の下の括弧内は標準誤差を表すものとする。

のように書く。

5.8 予測

X_0 での Y_0 の予測量 \hat{Y}_0 は，

$$\hat{Y}_0 = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_0,$$

となる。ただし， Y_0 と X_0 との関係は，

$$Y_0 = \alpha + \beta X_0 + u_0,$$

$$u_0 \sim N(0, \sigma^2),$$

である。

予測誤差 $\hat{Y}_0 - Y_0$ は，

$$\hat{Y}_0 - Y_0 = (\hat{\alpha} - \alpha) + (\hat{\beta} - \beta)X_0 - u_0,$$

となる。

5.8.1 予測量の期待値と分散

両辺に期待値をとると，

$$\begin{aligned} E(\hat{Y}_0 - Y_0) &= E(\hat{\alpha} - \alpha) + E(\hat{\beta} - \beta)X_0 - E(u_0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

を得る（ $\hat{\alpha}$ ， $\hat{\beta}$ の不偏性と u_0 の仮定より）。

$E(\hat{Y}_0 - Y_0) = 0$ なので， $E(\hat{Y}_0) = Y_0$ となり， \hat{Y}_0 は Y_0 の不偏予測量と言える。

分散について，

$$\begin{aligned} V(\hat{Y}_0) &= E(\hat{Y}_0 - Y_0)^2 \\ &= E((\hat{\alpha} - \alpha) + (\hat{\beta} - \beta)X_0 - u_0)^2 \\ &= E(\hat{\alpha} - \alpha)^2 + X_0^2 E(\hat{\beta} - \beta)^2 + E(u_0^2) \\ &\quad + 2X_0 E((\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta)) \\ &\quad - 2E((\hat{\alpha} - \alpha)u_0) - 2X_0 E((\hat{\beta} - \beta)u_0) \end{aligned}$$

各項の期待値は，

$$E(\hat{\alpha} - \alpha)^2 = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right),$$

$$E(\hat{\beta} - \beta)^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2},$$

$$E(u_0^2) = \sigma^2,$$

$$E((\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta)) = -\frac{\sigma^2 \bar{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2},$$

$$E((\hat{\alpha} - \alpha)u_0) = 0,$$

$$E((\hat{\beta} - \beta)u_0) = 0,$$

となるので，

$$\begin{aligned} V(\hat{Y}_0) &= E(\hat{\alpha} - \alpha)^2 + X_0^2 E(\hat{\beta} - \beta)^2 + E(u_0^2) \\ &\quad + 2X_0 E((\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta)) \\ &= \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right) \\ &\quad + \frac{\sigma^2 X_0^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} + \sigma^2 \\ &\quad - \frac{2\sigma^2 X_0 \bar{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ &= \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right) \end{aligned}$$

を得る。

$X_0 = \bar{X}$ のとき，予測分散が最小になり，そのときの予測分散の値は $\sigma^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ となる。

X_0 が \bar{X} から離れるにつれて，予測分散は大きくなる。

5.8.2 予測の区間推定

予測量 \hat{Y}_0 の分布は,

$$\hat{Y}_0 \sim N\left(Y_0, \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}\right)\right),$$

となり, よって,

$$\frac{\hat{Y}_0 - Y_0}{\sigma \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}} \sim N(0, 1),$$

を得る。

一方, s^2 について,

$$\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2),$$

となる。ただし, $s^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i)^2 =$

$\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$ である。

\hat{Y}_0 と s^2 は独立なので (証明略), したがって,

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{Y}_0 - Y_0}{\sigma \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}} \\ & \frac{\sqrt{\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2}} / (n-2)}{\hat{Y}_0 - Y_0} \sim t(n-2), \\ & \frac{\hat{Y}_0 - Y_0}{s \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}} \sim t(n-2), \end{aligned}$$

となる。

$t_{\alpha/2}(n-2)$ を, 自由度 $n-2$ の t 分布から得られた 100% 点の値とすると,

$$\begin{aligned} & \text{Prob}\left(-t_{\alpha/2}(n-2) < \frac{\hat{Y}_0 - Y_0}{s \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}}\right. \\ & \left. < t_{\alpha/2}(n-2)\right) = 1 - \alpha, \end{aligned}$$

となり, 信頼係数 $1 - \alpha$ の信頼区間は,

$$\begin{aligned} & \hat{Y}_0 - t_{\alpha/2}(n-2) s \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} \\ & < Y_0 < \\ & \hat{Y}_0 + t_{\alpha/2}(n-2) s \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}, \end{aligned}$$

となる。

数値例: 今までと同様に, 以下の数値例をとりあげる。

i	Y_i	X_i	$X_i Y_i$	X_i^2	\hat{Y}_i	\hat{u}_i
1	6	10	60	100	6.8	-0.8
2	9	12	108	144	8.1	0.9
3	10	14	140	196	9.4	0.6
4	10	16	160	256	10.7	-0.7
合計	$\sum Y_i$	$\sum X_i$	$\sum X_i Y_i$	$\sum X_i^2$	$\sum \hat{Y}_i$	$\sum \hat{u}_i$
	35	52	468	696	35	0
平均	\bar{Y}	\bar{X}				
	8.75	13				

必要な数値は,

$$\begin{aligned} & \bar{X} = 13, \\ & \sum_{i=1}^n X_i^2 = 696, \\ & \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 = 20, \\ & \hat{Y}_0 = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_0 = 0.3 + 0.65X_0, \\ & s = \sqrt{1.15} = 1.072, \end{aligned}$$

である。

$X_0 = 18$ のときの, 信頼係数 0.90 の Y_0 の信頼区間は, $\hat{Y}_0 = 0.3 + 0.65 \times 18 = 12$ なので,

$$\begin{aligned} & 12 - 2.920 \times 1.072 \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{(18-13)^2}{20}} \\ & < Y_0 < \\ & 12 + 2.920 \times 1.072 \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{(18-13)^2}{20}}, \end{aligned}$$

となり,

$$7.051 < Y_0 < 16.949,$$

を得る。

6 係数推定値の分散と正規方程式との関係

最小二乗法を復習すると, まず, 次のような関数 $S(\alpha, \beta)$ を定義する。

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n u_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2$$

$S(\alpha, \beta)$ の最小化によって,

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0$$

を満たす α, β が $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ となる。

すなわち, $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ は,

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n X_i(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i) = 0$$

を満たす。

さらに,

$$\sum_{i=1}^n Y_i = n\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$\sum_{i=1}^n X_i Y_i = \hat{\alpha} \sum_{i=1}^n X_i + \hat{\beta} \sum_{i=1}^n X_i^2,$$

行列表示によって,

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix},$$

$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ について, まとめて,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2} \\ & \quad \times \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n X_i^2 & -\sum_{i=1}^n X_i \\ -\sum_{i=1}^n X_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

逆行列の部分と分散, 共分散とは以下のような関係がある。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} V(\hat{\alpha}) & \text{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \\ \text{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) & V(\hat{\beta}) \end{pmatrix} \\ &= \sigma^2 \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2} \\ & \quad \times \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n X_i^2 & -\sum_{i=1}^n X_i \\ -\sum_{i=1}^n X_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2 & \sigma^2 \bar{X} \\ \sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i & \sigma^2 \bar{X} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{n \sum (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2 \bar{X}} & -\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \\ -\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2 \bar{X}} & \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$V(\hat{\alpha})$ は $\sigma^2 \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{pmatrix}^{-1}$ の第 1 行第 1 列目の要素に対応し, $V(\hat{\beta})$ は $\sigma^2 \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{pmatrix}^{-1}$ の第 2 行第 2 列目の要素に対応する。

7 多重回帰

n 組のデータ $(Y_i, X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{ki}), i = 1, 2, \dots, n$ を用いて, k 変数の多重回帰モデルを考える。

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + u_i,$$

ただし, X_{ji} は j 番目の説明変数の第 i 番目の観測値を表す。 u_i は誤差項 (または, 攪乱項) で, 同じ仮定を用いる (すなわち, u_1, u_2, \dots, u_n は互いに独立に, 平均ゼロ, 分散 σ^2 の正規分布に従う)。

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ は推定されるべきパラメータである。

すべての i について, $X_{1i} = 1$ とすれば, β_1 は定数項として表される。

次のような関数 $S(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ を定義する。

$$\begin{aligned} & S(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) \\ &= \sum_{i=1}^n u_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_1 X_{1i} - \beta_2 X_{2i} - \dots - \beta_k X_{ki})^2 \end{aligned}$$

このとき,

$$\min_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k} S(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$$

となるような $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ を求める。⇒ 最小自乗法

このときの解を $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k$ とする。

最小化のためには,

$$\frac{\partial S(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)}{\partial \beta_1} = 0$$

$$\frac{\partial S(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)}{\partial \beta_2} = 0$$

⋮

$$\frac{\partial S(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)}{\partial \beta_k} = 0$$

を満たす $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ が $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k$ となる。

すなわち, $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k$ は,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \dots - \hat{\beta}_k X_{ki}) X_{1i} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \dots - \hat{\beta}_k X_{ki}) X_{2i} &= 0, \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \dots - \hat{\beta}_k X_{ki}) X_{ki} &= 0, \end{aligned}$$

を満たす。

さらに,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_{1i} Y_i &= \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_{1i}^2 + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n X_{1i} X_{2i} + \dots \\ &\quad + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^n X_{1i} X_{ki}, \\ \sum_{i=1}^n X_{2i} Y_i &= \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_{1i} X_{2i} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n X_{2i}^2 + \dots \\ &\quad + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^n X_{2i} X_{ki}, \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^n X_{ki} Y_i &= \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_{1i} X_{ki} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n X_{2i} X_{ki} + \dots \\ &\quad + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^n X_{ki}^2, \end{aligned}$$

行列表示によって,

$$\begin{pmatrix} \sum X_{1i} Y_i \\ \sum X_{2i} Y_i \\ \vdots \\ \sum X_{ki} Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i} X_{2i} & \dots & \sum X_{1i} X_{ki} \\ \sum X_{1i} X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \dots & \sum X_{2i} X_{ki} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum X_{1i} X_{ki} & \sum X_{2i} X_{ki} & \dots & \sum X_{ki}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{pmatrix},$$

が得られ, $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k$ についてまとめると,

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i} X_{2i} & \dots & \sum X_{1i} X_{ki} \\ \sum X_{1i} X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \dots & \sum X_{2i} X_{ki} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum X_{1i} X_{ki} & \sum X_{2i} X_{ki} & \dots & \sum X_{ki}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum X_{1i} Y_i \\ \sum X_{2i} Y_i \\ \vdots \\ \sum X_{ki} Y_i \end{pmatrix},$$

を解くことになる。⇒ コンピュータによって計算

7.1 推定量の性質

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ の最小二乗推定量は $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k$ とする。
誤差項 (または, 攪乱項) u_i の分散 σ^2 の推定量 s^2 は,

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 \\ &= \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \dots - \hat{\beta}_k X_{ki})^2 \end{aligned}$$

として表される。

このとき,

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}_j) &= \beta_j, \\ \text{plim} \hat{\beta}_j &= \beta_j, \\ E(s^2) &= \sigma^2, \end{aligned}$$

$$\text{plim}s^2 = \sigma^2,$$

を証明することが出来る。(証明略)

分布について： $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k$ の分散は以下のように表される。

$$\begin{aligned} & V \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} V(\hat{\beta}_1) & \text{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) & \cdots & \text{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_k) \\ \text{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1) & V(\hat{\beta}_2) & \cdots & \text{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_1) & \text{Cov}(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_2) & \cdots & V(\hat{\beta}_k) \end{pmatrix} \\ &= \sigma^2 \begin{pmatrix} \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} & \cdots & \sum X_{1i}X_{ki} \\ \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \cdots & \sum X_{2i}X_{ki} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum X_{1i}X_{ki} & \sum X_{2i}X_{ki} & \cdots & \sum X_{ki}^2 \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

$\hat{\beta}_j$ の分散 (すなわち, 上の逆行列の j 番目の対角要素) を,

$$V(\hat{\beta}_j) = \sigma_{\hat{\beta}_j}^2,$$

として, その推定量を $s_{\hat{\beta}_j}^2$ とする。

このとき,

$$\hat{\beta}_j \sim N(\beta_j, \sigma_{\hat{\beta}_j}^2),$$

となり, 標準化すると,

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sigma_{\hat{\beta}_j}} \sim N(0, 1),$$

が得られる。さらに,

$$\frac{(n-k)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k),$$

となり (証明略), しかも, $\hat{\beta}_j$ と s^2 の独立性から (証明略),

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{s_{\hat{\beta}_j}} \sim t(n-k)$$

となる。

よって, 通常の区間推定や仮説検定を行うことが出来る。

決定係数について: また, 決定係数 R^2 についても同様に表される。

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \\ &= 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \end{aligned}$$

ただし, $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_k X_{ki}$, $Y_i = \hat{Y}_i + \hat{u}_i$ である。

R^2 は, 説明変数を増やすことによって, 必ず大きくなる。なぜなら, 説明変数が増えることによって, $\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$ が必ず減少するからである。

R^2 を基準にすると, 被説明変数にとって意味のない変数でも, 説明変数が多いほど, よりよいモデルということになる。この点を改善するために, 自由度修正済み決定係数 \bar{R}^2 を用いる。

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 / (n-k)}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 / (n-1)},$$

$\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 / (n-k)$ は u_i の分散 σ^2 の不偏推定量であり, $\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 / (n-1)$ は Y_i の分散の不偏推定量である。 R^2 と \bar{R}^2 との関係は,

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-k},$$

となる。さらに,

$$\frac{1 - \bar{R}^2}{1 - R^2} = \frac{n-1}{n-k} \geq 1,$$

という関係から, $\bar{R}^2 \leq R^2$ という結果を得る。($k=1$ のときのみ, 等号が成り立つ。)

数値例: 今までと同じ数値例で, \bar{R}^2 を計算する。

i	Y_i	X_i	$X_i Y_i$	X_i^2	\hat{Y}_i	\hat{u}_i
1	6	10	60	100	6.8	-0.8
2	9	12	108	144	8.1	0.9
3	10	14	140	196	9.4	0.6
4	10	16	160	256	10.7	-0.7
合計	$\sum Y_i$ 35	$\sum X_i$ 52	$\sum X_i Y_i$ 468	$\sum X_i^2$ 696	$\sum \hat{Y}_i$ 35	$\sum \hat{u}_i$ 0
平均	\bar{Y} 8.75	\bar{X} 13				

まず R^2 は,

$$R^2 = 1 - \frac{\sum \hat{u}_i^2}{\sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{(-0.8)^2 + 0.9^2 + 0.6^2 + (-0.7)^2}{35 - 4 \times 8.75^2} \\
&= 1 - \frac{2.30}{10.75} \\
&= 0.786
\end{aligned}$$

となり、 \bar{R}^2 は、

$$\begin{aligned}
\bar{R}^2 &= 1 - \frac{\sum \hat{u}_i^2 / (n - k)}{(\sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2) / (n - 1)} \\
&= 1 - \frac{2.30 / (4 - 2)}{10.75 / (4 - 1)} \\
&= 0.679
\end{aligned}$$

となる。

注意： R^2 や \bar{R}^2 を比較する場合、被説明変数が同じことが必要である。被説明変数が異なる場合（例えば、被説明変数を上昇率とするかそのままの値を用いるかによって、被説明変数が異なる）、誤差項 u_i の標準誤差で比較すべきである（標準誤差の小さいモデルを採用する）。

⇒ 関数型の選択

7.2 多重共線性について

回帰式が

$$y_t = \alpha w_t + \beta x_t + u_t$$

の場合を考える。 w_t, x_t が外生変数、 y_t は内生変数、 u_t は互いに独立な攪乱項とする。 $w_t = 1$ のとき、 α は定数項となる。

w_t と x_t の相関が大きいことを多重共線性が強いと言う。 w_t と x_t の相関が大きい場合は、 α, β の推定値は不安定になる。

極端な場合、 w_t と x_t の相関が 1 の場合（完全相関の場合）は、すべての t について、 $w_t = \gamma x_t$ となる。この場合、回帰式は

$$\begin{aligned}
y_t &= \alpha w_t + \beta x_t + u_t \\
&= (\alpha\gamma + \beta)x_t + u_t
\end{aligned}$$

となり、 $\alpha\gamma + \beta$ を推定することは可能だが、 α, β を別々に推定することはできなくなる。 $y_t = \alpha w_t + \beta x_t + u_t$ を推定した場合、 $\alpha\gamma + \beta$ の推定値が一定値となる $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ の組み合わせは無数に存在する。この意味で、 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ は不安定であると言える。

厳密には、最小二乗法によると、

$$\sum_{t=1}^T u_t^2 = \sum_{t=1}^T (y_t - \alpha w_t - \beta x_t)^2$$

を最小にする α, β をその推定値 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ とする。すなわち、

$$\frac{\partial \sum u_t^2}{\partial \alpha} = -2 \sum_{t=1}^T (y_t - \alpha w_t - \beta x_t) w_t = 0$$

$$\frac{\partial \sum u_t^2}{\partial \beta} = -2 \sum_{t=1}^T (y_t - \alpha w_t - \beta x_t) x_t = 0$$

の連立方程式を解くことになる。

$$\sum_{t=1}^T y_t w_t - \hat{\alpha} \sum_{t=1}^T w_t^2 - \hat{\beta} \sum_{t=1}^T x_t w_t = 0$$

$$\sum_{t=1}^T y_t x_t - \hat{\alpha} \sum_{t=1}^T w_t x_t - \hat{\beta} \sum_{t=1}^T x_t^2 = 0$$

行列表示により、

$$\begin{pmatrix} \sum y_t w_t \\ \sum y_t x_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum w_t^2 & \sum x_t w_t \\ \sum w_t x_t & \sum x_t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix}$$

$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ について表すと、

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum w_t^2 & \sum x_t w_t \\ \sum w_t x_t & \sum x_t^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum y_t w_t \\ \sum y_t x_t \end{pmatrix}$$

逆行列を計算して、

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} &= \frac{1}{(\sum w_t^2)(\sum x_t^2) - (\sum w_t x_t)^2} \\
&\times \begin{pmatrix} \sum x_t^2 & -\sum x_t w_t \\ -\sum w_t x_t & \sum w_t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum y_t w_t \\ \sum y_t x_t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

完全な多重共線性の場合 ($w_t = \gamma x_t$ の場合)、

$$(\sum w_t^2)(\sum x_t^2) - (\sum w_t x_t)^2 = 0$$

となる。

また、

$$\begin{aligned}
V \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} V(\hat{\alpha}) & \text{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \\ \text{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) & V(\hat{\beta}) \end{pmatrix} \\
&= \sigma^2 \begin{pmatrix} \sum w_t^2 & \sum x_t w_t \\ \sum w_t x_t & \sum x_t^2 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \frac{\sigma^2}{(\sum w_t^2)(\sum x_t^2) - (\sum w_t x_t)^2} \\
&\times \begin{pmatrix} \sum x_t^2 & -\sum x_t w_t \\ -\sum w_t x_t & \sum w_t^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となるので、完全な多重共線性の場合には、推定値の分散が無大となる。推定値の分散が無大という意味は、どこに推定値があるか分からないということの意味する。簡単化のため、 $\bar{w} = \frac{1}{T} \sum w_t = 0$, $\bar{x} = \frac{1}{T} \sum x_t = 0$ とする。 w_t と x_t との相関係数を ρ とすると、

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\sum(w_t - \bar{w})(x_t - \bar{x})}{\sqrt{\sum(w_t - \bar{w})^2 \sum(x_t - \bar{x})^2}} \\ &= \frac{\sum w_t x_t}{\sqrt{\sum w_t^2 \sum x_t^2}} \end{aligned}$$

となる。さらに、 ρ を用いて、 $V(\hat{\alpha})$, $V(\hat{\beta})$ を求めると、

$$\begin{aligned} V(\hat{\alpha}) &= \frac{\sigma^2 \sum x_t^2}{(\sum w_t^2)(\sum x_t^2) - (\sum w_t x_t)^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{(1 - \rho^2) \sum w_t^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(\hat{\beta}) &= \frac{\sigma^2 \sum w_t^2}{(\sum w_t^2)(\sum x_t^2) - (\sum w_t x_t)^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{(1 - \rho^2) \sum x_t^2} \end{aligned}$$

が得られる。

これは、 ρ が 1 または -1 に近づくにつれて (または、 ρ^2 が 1 に近づくにつれて)、 $V(\hat{\alpha})$, $V(\hat{\beta})$ は大きくなるということの意味する。

⇒ 係数の推定値の有意性が低くなる。

⇒ 本来は w_t や x_t が y_t に影響を与えているにもかかわらず、統計的に有意な推定値は得られなくなるので、回帰分析によって理論モデルを立証しようという試みは成功しなくなる。

多重共線性の症状： 多重共線性が起こっていると考えられるケースは、

1. 推定値の符号が理論と合わない。
2. 決定係数 (R^2 や \bar{R}^2) は大きいのに、個々の t 値は小さい。
3. 観測値の数 (データ数) を少し増やすと、推定値が大きく変わる。
4. 説明変数を増減すると、推定値が大きく変動する。

等である。

7.3 ダミー変数について

7.3.1 異常値

データに異常値が含まれている場合、経済構造がある時期から変化した場合、ダミー変数を使う。

ダミー変数とは、0 と 1 から成る変数のことである。

例えば、データが 20 期間あるとして、9 期目のデータが、回帰直線から離れている場合 (異常値の場合) を考える。

$$d_t = \begin{cases} 0, & t \neq 9 \text{ のとき} \\ 1, & t = 9 \text{ のとき} \end{cases}$$

という変数を作り、

$$y_t = \alpha + \delta d_t + \beta x_t + u_t$$

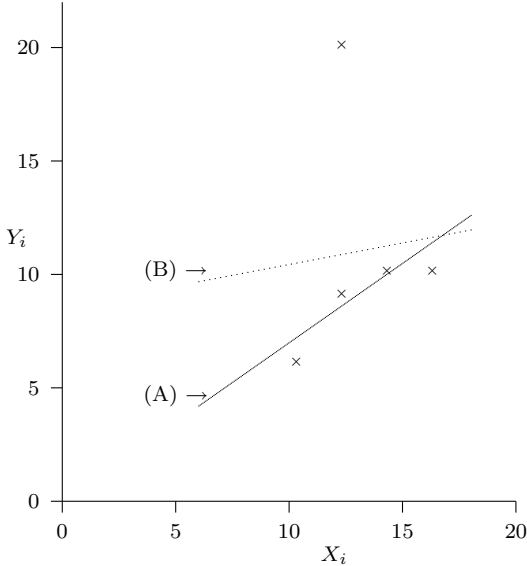
を推定する。 δ の推定値 $\hat{\delta}$ の有意性を調べることによって、異常値かどうかの検定ができる。

数値例： 今までと同様に、以下の数値例をとりあげる。

i	Y_i	X_i	D_i
1	6	10	0
2	9	12	0
3	10	14	0
4	10	16	0
5	20	12	1

第 5 期目が異常値である。

図 3：異常値



(A) は $i = 1, 2, 3, 4$ のデータを使って、推定した回帰直線である。(B) は $i = 1, 2, 3, 4, 5$ のデータを使って、推定した回帰直線である。(A), (B) の推定結果は以下のとおりである。

$$(A): Y_i = \begin{matrix} 0.3 \\ (0.095) \end{matrix} + \begin{matrix} 0.65 \\ (2.708) \end{matrix} X_i, \\ R^2 = 0.786, \quad s^2 = 1.072^2,$$

$$(B): Y_i = \begin{matrix} 8.54 \\ (0.49) \end{matrix} + \begin{matrix} 0.19 \\ (0.14) \end{matrix} X_i, \\ R^2 = 0.007, \quad s^2 = 6.09^2,$$

ただし、係数の推定値の下の括弧内は t 値を表すものとする。

このように、結果が大幅に変わる。第 5 期は異常値なので、ダミー変数を用いて、

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma D_i + u_i,$$

として推定を行う。 $i = 1, 2, 3, 4$ について、 $D_i = 0$ とし、 $i = 5$ について、 $D_i = 1$ とする変数である。この回帰式の意味は、

$$Y_i = \begin{cases} \alpha + \beta X_i + u_i, & i = 1, 2, 3, 4 \text{ のとき,} \\ (\alpha + \gamma) + \beta X_i + u_i, & i = 5 \text{ のとき,} \end{cases}$$

となる。推定結果は、

$$Y_i = \begin{matrix} 0.3 \\ (0.095) \end{matrix} + \begin{matrix} 0.65 \\ (2.708) \end{matrix} X_i + \begin{matrix} 11.9 \\ (9.73) \end{matrix} D_i, \\ R^2 = 0.979, \quad s^2 = 1.072^2,$$

となる。この場合、 $\hat{Y}_5 = Y_5$ 、すなわち、 $\hat{u}_5 = 0$ となることに注意。

7.3.2 構造変化

次に、9 期目以前と以降とで、経済構造が変化している場合を考える。

$$d_t = \begin{cases} 0, & t = 1, 2, \dots, 8 \text{ のとき} \\ 1, & 9, 10, \dots, 20 \text{ のとき} \end{cases}$$

という変数を作り、

$$y_t = \alpha + \delta d_t + \beta x_t + u_t$$

を推定する(定数項だけが変化したと考えた場合)。または、

$$y_t = \alpha + \delta d_t + \beta x_t + \gamma d_t x_t + u_t$$

を推定する(定数項も係数も変化)。

δ や γ の推定値の有意性を調べることによって、構造変化の検定を行うことができる。

上の例でデータを示すと、

t	y_t	x_t	d_t	$d_t x_t$
1	y_1	x_1	0	0
2	y_2	x_2	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
8	y_8	x_8	0	0
9	y_9	x_9	1	x_9
10	y_{10}	x_{10}	1	x_{10}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
20	y_{20}	x_{20}	1	x_{20}

となる。

8 関数型について

線型：

$$y_t = \alpha + \beta x_t + u_t,$$

この場合,

$$\beta = \frac{dy_t}{dx_t}$$

なので, β は, x_t が一単位上昇(下落)したとき, y_t は何単位上昇(下落)するのかを表す。すなわち, β は限界係数と呼ばれる。

成長率:

$$100 \times \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} = \alpha + \beta x_t + u_t,$$

として, 成長率を被説明変数として用いる場合もある。 $100 \times \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}}$ という変数をあらかじめ作っておき, これをこれまでの y_t として扱う。

注意:

$y_t = \alpha + \beta x_t + u_t$ と $100 \times \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} = \alpha + \beta x_t + u_t$ では, 得られる決定係数の大きさが全く異なる。単純に, R^2 や \bar{R}^2 による比較はこの場合出来ない。
 $\Rightarrow s^2$ で比較すればよい。

対数線型:

$$\log(y_t) = \alpha + \beta \log(x_t) + u_t,$$

この場合,

$$\beta = \frac{d \log(y_t)}{d \log(x_t)} = \frac{\frac{dy_t}{y_t}}{\frac{dx_t}{x_t}} = \frac{100 \frac{dy_t}{y_t}}{100 \frac{dx_t}{x_t}}$$

となる。

2つ目の等号では, $\frac{d \log(y_t)}{dy_t} = \frac{1}{y_t}$ が利用される。

3つ目の等号の分子 $100 \frac{dy_t}{y_t}$ や分母 $100 \frac{dx_t}{x_t}$ は上昇率を表す。

したがって, β は, x_t が1%上昇(下落)したとき, y_t は何%上昇(下落)するのかを表す。 β は弾力性と呼ばれる。

例: コブ=ダグラス型生産関数:

$$Q_i = \beta_1 K_i^{\beta_2} L_i^{\beta_3}$$

ただし, Q_i は生産量, K_i は資本, L_i は労働である。この場合, 対数変換によって,

$$\log(Q_i) = \beta_1' + \beta_2 \log(K_i) + \beta_3 \log(L_i) + u_i,$$

として, $\log(Q_i)$, $\log(K_i)$, $\log(L_i)$ のデータをあらかじめ変換しておき, 最小二乗法で β_1' , β_2 , β_3 を推定する。また,

生産関数には一次同時の制約 $\beta_2 + \beta_3 = 1$ を置く場合が多い。この場合は,

$$\begin{aligned} \log(Q_i) &= \beta_1' + \beta_2 \log(K_i) + \beta_3 \log(L_i) \\ &= \beta_1' + \beta_2 \log(K_i) + (1 - \beta_2) \log(L_i) + u_i \\ &= \beta_1' + \beta_2 (\log(K_i) - \log(L_i)) + \log(L_i) + u_i, \end{aligned}$$

となるので,

$$\log(Q_i) - \log(L_i) = \beta_1' + \beta_2 (\log(K_i) - \log(L_i)) + u_i,$$

を最小二乗法で推定し, β_1' , β_2 を求めることになる。この場合も同様に, 各変数をあらかじめ, $\log(Q_i) - \log(L_i)$, $\log(K_i) - \log(L_i)$ としてデータを作っておく必要がある。

二次式:

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \gamma x_t^2 + u_t,$$

\Rightarrow 平均費用と生産量との関係等

逆数:

$$y_t = \alpha + \beta \frac{1}{x_t} + u_t,$$

\Rightarrow 賃金上昇率と失業率との関係(フィリップス曲線)

遅れのある変数: 習慣的効果を考慮に入れたモデル:

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \gamma y_{t-1} + u_t,$$

ラグ付き内生変数が説明変数に用いられる。

x_t の y_t への効果は, 短期効果, 長期効果の2つある。 β は短期効果を表す係数である。長期効果とは, $y_t = y_{t-1}$ となるとき, x_t から y_t への影響を示す効果である。

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \gamma y_t + u_t,$$

として, y_t について解くと,

$$y_t = \frac{\alpha}{1 - \gamma} + \frac{\beta}{1 - \gamma} x_t + \frac{1}{1 - \gamma} u_t,$$

となり, $\frac{\beta}{1 - \gamma}$ が x_t の y_t への長期効果を表す係数となる。

問題点:

1. 最小二乗法の仮定の一つに, 説明変数は確率変数ではないという仮定がある。ラグ付き内生変数を説明変数に加えることによって, この仮定が満たされなくなる。最小二乗推定量は最小分散線型不偏推定量ではなくなる。

2. y_t と x_t とは、経済理論的に考えると、相関が高いはず。 y_t と y_{t-1} は相関が高い。当然、 y_{t-1} と x_t も高い相関を示す。

⇒ 多重共線性の可能性が高い。

3. DW 統計量は意味をなさない (後述)。

9 ラグ変数について

9.1 分布ラグ

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \dots + \beta_m X_{t-m} + u_t$$

$$= \alpha + \sum_{i=0}^m \beta_i X_{t-i} + u_t$$

1. 短期効果：

X_t が 1 単位増加したときの Y_t の増加分

⇒ β_0

2. 長期効果：

$X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_1$ のすべてが 1 単位増加したときの Y_t の増加分

⇒ $\sum_{i=0}^m \beta_i$

問題点：

X_t は X_{t-1} と強い相関がある。同様に、 X_t は X_{t-2}, X_{t-3}, \dots も強い相関があると考えられる。

⇒ 説明変数間に線形関係が存在する。

⇒ 多重共線性の問題

改善策：

コイック・ラグ

コイック・ラグ： $m = \infty$ の場合を考える。ラグ・パターンを

$$\beta_i = \lambda^i \beta_0$$

として仮定する。ただし、 $0 < \lambda < 1$ とする。

すなわち、以下のように書ける。

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \lambda \beta_0 X_{t-1} + \lambda^2 \beta_0 X_{t-2} + \dots + u_t$$

$$= \alpha + \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \beta_0 X_{t-i} + u_t,$$

一期ずらして、辺々に λ を掛けると、

$$\lambda Y_{t-1} = \lambda \alpha + \lambda \beta_0 X_{t-1} + \lambda^2 \beta_0 X_{t-2} + \lambda^3 \beta_0 X_{t-3} + \dots + \lambda u_{t-1},$$

次に、 $Y_t - \lambda Y_{t-1}$ を計算する。

$$Y_t - \lambda Y_{t-1} = (1 - \lambda) \alpha + \beta_0 X_t + (u_t - \lambda u_{t-1}),$$

以下の式を推定することになる。

$$Y_t = \alpha' + \beta_0 X_t + \lambda Y_{t-1} + v_t,$$

この場合、

1. 短期効果： β_0

2. 長期効果： $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \beta_0 = \frac{\beta_0}{1 - \lambda}$

となる。

問題点：

新たな攪乱項 v_t は最小二乗法の仮定を満たさない。

1. Y_{t-1} が説明変数の一つに入っている (説明変数間が確率変数でないという仮定に反する)。

2. v_t と Y_{t-1} との間に相関がある (誤差項と説明変数間に相関が無いという仮定に反する)。

3. v_t と v_{t-1} との間に相関がある (異時点間の誤差項間に相関が無いという仮定に反する)。

得られた推定量は不偏推定量でも、一致推定量でもない (証明略)。

9.2 部分調整モデル

X_t が与えられたときの Y の最適水準を Y_t^* とする。

$$Y_t^* = \alpha + \beta X_t,$$

現実の水準 Y_t は、最適水準 Y_t^* と前期の水準 Y_{t-1} との差の一定割合と前期の水準 Y_{t-1} との和で与えられるとする。調整関数を考える。

$$Y_t - Y_{t-1} = \lambda(Y_t^* - Y_{t-1}) + u_t,$$

ただし、 u_t は互いに独立で同一な分布の誤差項、 $0 < \lambda < 1$ とする。

よって,

$$Y_t = \lambda\alpha + \lambda\beta X_t + (1 - \lambda)Y_{t-1} + u_t,$$

を得る。

Y_{t-1} と u_t との相関はない。

しかし, Y_{t-1} が説明変数の一つに入っている (説明変数間
が確率変数でないという仮定に反する)。

推定量は不偏推定量ではないが, 一致推定量である (証明
略)。

10 F 検定について

複数の線形制約の検定を行う場合に F 検定が用いられる。

10.1 いくつかの例

例 1: コブ=ダグラス型生産関数: Q_i は生産量, K_i は
資本, L_i は労働とする。生産関数を推定する。

$$\log(Q_i) = \beta_1' + \beta_2 \log(K_i) + \beta_3 \log(L_i) + u_i,$$

において, 一次同時の制約 $\beta_2 + \beta_3 = 1$ を検定したい。す
なわち, 帰無仮説, 対立仮説は以下のように表される。

$$\text{帰無仮説 } H_0: \beta_2 + \beta_3 = 1,$$

$$\text{対立仮説 } H_1: \beta_2 + \beta_3 \neq 1,$$

例 2: 構造変化の検定: n_0 期以前と $n_0 + 1$ 期以降と
で経済構造が変化したと考えて推定を行う。しかも, 定数
項, 傾き共に変化すると想定した場合, 回帰式は以下のよ
うになる。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma d_i + \delta d_i X_i + u_i,$$

ただし,

$$d_i = \begin{cases} 0, & i = 1, 2, \dots, n_0 \text{ のとき,} \\ 1, & i = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, n \text{ のとき,} \end{cases}$$

とする。構造変化が $n_0 + 1$ 期で起こったかどうかを検定
したい。すなわち, 帰無仮説, 対立仮説は以下のように表
される。

$$\text{帰無仮説 } H_0: \gamma = \delta = 0,$$

$$\text{対立仮説 } H_1: \gamma \neq 0, \text{ または, } \delta \neq 0,$$

例 3: 多重回帰モデルの係数の同時検定: 2 つの説明変
数が含まれる場合を考える。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma Z_i + u_i,$$

のモデルにおいて, X_i と Z_i のどちらも, Y_i に影響を与
えていないという仮説を検定したい。この場合, 帰無仮説,
対立仮説は以下のように表される。

$$\text{帰無仮説 } H_0: \beta = \gamma = 0,$$

$$\text{対立仮説 } H_1: \beta \neq 0, \text{ または, } \gamma \neq 0,$$

10.2 検定の方法

多重回帰モデル

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + u_i,$$

において, パラメータ $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ に何らかの制約が妥
当かどうかを検定する。

制約の数を G 個とする。

全く制約の無い場合に得られた残差を \hat{u}_i とする。

制約を含めて推定されたときの残差を \tilde{u}_i とする。

すなわち,

$$\text{帰無仮説 } H_0: \beta_{k-G+1} = \dots = \beta_k = 0,$$

$$\text{対立仮説 } H_1: H_0 \text{ でない。}$$

を検定する場合,

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_{k-G} X_{k-G,i} \\ + \beta_{k-G+1} X_{k-G+1,i} + \dots + \beta_k X_{ki} + u_i,$$

の推定によって得られた残差を \hat{u}_i (制約なし残差) とおき,

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_{k-G} X_{k-G,i} + u_i,$$

の推定によって得られた残差を \tilde{u}_i (制約付き残差) とする。

1. H_0 が真のとき, $\frac{\sum \tilde{u}_i^2 - \sum \hat{u}_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(G)$ となる。(証
明略)

2. また, $\frac{\sum \hat{u}_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n - k)$ となる。(証明略)

3. さらに, $\frac{\sum \tilde{u}_i^2 - \sum \hat{u}_i^2}{\sigma^2}$ と $\frac{\sum \hat{u}_i^2}{\sigma^2}$ とは独立に分布する。
(証明略)

4. したがって, この場合,

$$\frac{(\sum \tilde{u}_i^2 - \sum \hat{u}_i^2)/G}{\sum \hat{u}_i^2/(n - k)} \sim F(G, n - k),$$

となる。(証明略)

例 1：コブ = ダグラス型生産関数：
 制約なしの場合：

$$\log(Q_i) = \beta_1' + \beta_2 \log(K_i) + \beta_3 \log(L_i) + u_i,$$

$\beta_2 + \beta_3 = 1$ の制約ありの場合：

$$\log\left(\frac{Q_i}{L_i}\right) = \beta_1' + \beta_2 \log\left(\frac{K_i}{L_i}\right) + u_i,$$

例 2：構造変化の検定：
 制約なしの場合：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma d_i + \delta d_i X_i + u_i,$$

$\gamma = \delta = 0$ の制約ありの場合：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

例 3：多重回帰モデルの係数の同時検定：
 制約なしの場合：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma Z_i + u_i,$$

$\beta = \gamma = 0$ の制約ありの場合：

$$Y_i = \alpha + u_i,$$

11 系列相関：DW について

11.1 DW について

最小自乗法の仮定の一つに、「攪乱項 u_1, u_2, \dots, u_T はそれぞれ独立に分布する」というものがあった。ダービン・ワトソン比 (DW) とは、誤差項の系列相関、すなわち、 u_t と u_{t-1} との間の相関の有無を検定するために考案された。
 ⇒ 時系列データのときのみ有効

u_1, u_2, \dots, u_T の系列について、それぞれの符号が、 $++ + - - - + + - - - + +$ のように、プラスが連続で続いた後で、マイナスが連続で続くというような場合、 u_1, u_2, \dots, u_T は正の系列相関があると言う。また、 $+ - + - + - + - +$ のように交互にプラス、マイナスになる場合、 u_1, u_2, \dots, u_T 負の系列相関があると言う。

特徴： u_1, u_2, \dots, u_t から u_{t+1} の符号が予想できる。⇒
 「 u_1, u_2, \dots, u_T はそれぞれ独立に分布する」という仮定に反する。

すなわち、ダービン・ワトソン比とは、回帰式が

$$y_t = \alpha + \beta x_t + u_t,$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t,$$

のときに、 $H_0: \rho = 0, H_1: \rho \neq 0$ の検定である。ただし、 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_T$ は互いに独立とする。

ダービン・ワトソン比の定義は次の通りである。

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^T (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2}$$

DW は近似的に、次のように表される。

$$\begin{aligned} DW &= \frac{\sum_{t=2}^T (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2} \\ &= \frac{\sum_{t=2}^T \hat{u}_t^2 - 2 \sum_{t=2}^T \hat{u}_t \hat{u}_{t-1} + \sum_{t=2}^T \hat{u}_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2} \\ &= \frac{2 \sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2 - (\hat{u}_1^2 + \hat{u}_T^2) - 2 \sum_{t=2}^T \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2} \\ &\approx 2(1 - \hat{\rho}), \end{aligned}$$

以下の 2 つの近似が用いられる。

$$\frac{\hat{u}_1^2 + \hat{u}_T^2}{\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2} \approx 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{t=2}^T \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2} &= \frac{\sum_{t=2}^T \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=2}^T \hat{u}_{t-1}^2 + \hat{u}_T^2} \\ &\approx \frac{\sum_{t=2}^T \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=2}^T \hat{u}_{t-1}^2} \\ &= \hat{\rho}, \end{aligned}$$

すなわち、 $\hat{\rho}$ は \hat{u}_t と \hat{u}_{t-1} の回帰係数である。 $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$ において、 u_t, u_{t-1} の代わりに \hat{u}_t, \hat{u}_{t-1} に置き換えて、 ρ の推定値 $\hat{\rho}$ を求める。

1. DW の値が 2 前後のとき、系列相関なし ($\hat{\rho} = 0$ のとき、 $DW \approx 2$)。
2. DW が 2 より十分に小さいとき、正の系列相関と判定される。
3. DW が 2 より十分に大きいとき、負の系列相関と判定される。

正確な判定には、データ数 T とパラメータ数 k に依存する。表 4 と表 5 を参照せよ。

表 4 と表 5 で、 k' は定数項を除くパラメータ数を表すものとする。

数値例： 今までと同じ数値例で， DW を計算する。

i	Y_i	X_i	$X_i Y_i$	X_i^2	\hat{Y}_i	\hat{u}_i
1	6	10	60	100	6.8	-0.8
2	9	12	108	144	8.1	0.9
3	10	14	140	196	9.4	0.6
4	10	16	160	256	10.7	-0.7
合計	$\sum Y_i$ 35	$\sum X_i$ 52	$\sum X_i Y_i$ 468	$\sum X_i^2$ 696	$\sum \hat{Y}_i$ 35	$\sum \hat{u}_i$ 0
平均	\bar{Y} 8.75	\bar{X} 13				

$$\begin{aligned}
 DW &= \frac{\sum_{t=2}^T (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2} \\
 &= \frac{(-0.8 - 0.9)^2 + (0.9 - 0.6)^2 + (0.6 - (-0.7))^2}{(-0.8)^2 + 0.9^2 + 0.6^2 + (-0.7)^2} \\
 &= \frac{4.67}{2.30} = 2.03
 \end{aligned}$$

推定結果の表記方法： 回帰モデル：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

の推定の結果， $\hat{\alpha} = 0.3$ ， $\hat{\beta} = 0.65$ ， $s_{\hat{\alpha}} = \sqrt{10.0005} = 3.163$ ， $s_{\hat{\beta}} = \sqrt{0.0575} = 0.240$ ， $\frac{\hat{\alpha}}{s_{\hat{\alpha}}} = 0.095$ ， $\frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}} = 2.708$ ， $s^2 = 1.15$ (すなわち， $s = 1.07$)， $R^2 = 0.786$ ， $\bar{R}^2 = 0.679$ ， $DW = 2.03$ を得た。これらをまとめて，

$$\begin{aligned}
 Y_i &= \underset{(0.095)}{0.3} + \underset{(2.708)}{0.65} X_i, \\
 R^2 &= 0.786, \quad \bar{R}^2 = 0.679, \\
 s &= 1.07, \quad DW = 2.03,
 \end{aligned}$$

ただし，係数の推定値の下の括弧内は t 値を表すものとする。

または，

$$\begin{aligned}
 Y_i &= \underset{(3.163)}{0.3} + \underset{(0.240)}{0.65} X_i, \\
 R^2 &= 0.786, \quad \bar{R}^2 = 0.679, \\
 s &= 1.07, \quad DW = 2.03,
 \end{aligned}$$

ただし，係数の推定値の下の括弧内は標準誤差を表すものとする。

のように書く。 $s = \sqrt{1.15} = 1.07$ に注意。

図 4： 正の系列相関

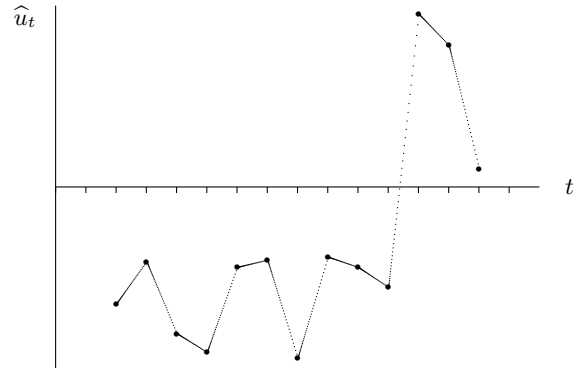
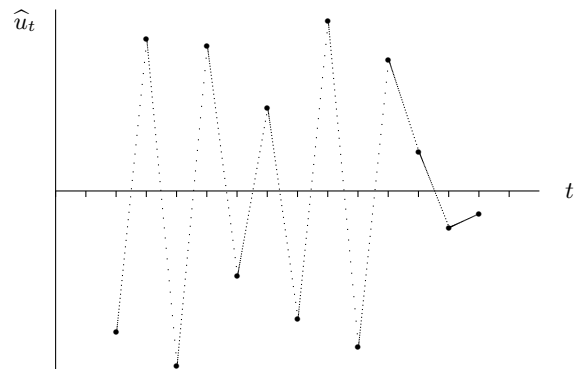


図 5： 負の系列相関



11.2 系列相関のもとで回帰式の推定

回帰式が

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

$$u_i = \rho u_{i-1} + \epsilon_i,$$

のときの推定を考える。ただし， $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ は互いに独立とする。

表 4: ダービン・ワトソン統計量の 5% 点の上限と下限

(1) $k' = 1$

T	A		B		C		D		E	
	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限
	0	dl	dl	du	du	4 - du	4 - du	4 - dl	4 - dl	4
15	0	1.08	1.08	1.36	1.36	2.64	2.64	2.92	2.92	4
20	0	1.20	1.20	1.41	1.41	2.59	2.59	2.80	2.80	4
25	0	1.29	1.29	1.45	1.45	2.55	2.55	2.71	2.71	4
30	0	1.35	1.35	1.49	1.49	2.51	2.51	2.65	2.65	4

(2) $k' = 2$

T	A		B		C		D		E	
	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限
	0	dl	dl	du	du	4 - du	4 - du	4 - dl	4 - dl	4
15	0	0.95	0.95	1.54	1.54	2.46	2.46	3.05	3.05	4
20	0	1.10	1.10	1.54	1.54	2.46	2.46	2.90	2.90	4
25	0	1.21	1.21	1.55	1.55	2.45	2.45	2.79	2.79	4
30	0	1.28	1.28	1.57	1.57	2.43	2.43	2.72	2.72	4

(3) $k' = 3$

T	A		B		C		D		E	
	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限
	0	dl	dl	du	du	4 - du	4 - du	4 - dl	4 - dl	4
15	0	0.82	0.82	1.75	1.75	2.25	2.25	3.18	3.18	4
20	0	1.00	1.00	1.68	1.68	2.32	2.32	3.00	3.00	4
25	0	1.12	1.12	1.66	1.66	2.34	2.34	2.88	2.88	4
30	0	1.21	1.21	1.65	1.65	2.35	2.35	2.79	2.79	4

(4) $k' = 4$

T	A		B		C		D		E	
	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限
	0	dl	dl	du	du	4 - du	4 - du	4 - dl	4 - dl	4
15	0	0.69	0.69	1.97	1.97	2.03	2.03	3.31	3.31	4
20	0	0.90	0.90	1.83	1.83	2.17	2.17	3.10	3.10	4
25	0	1.04	1.04	1.77	1.77	2.23	2.23	2.96	2.96	4
30	0	1.14	1.14	1.74	1.74	2.26	2.26	2.86	2.86	4

(5) $k' = 5$

T	A		B		C		D		E	
	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限
	0	dl	dl	du	du	4 - du	4 - du	4 - dl	4 - dl	4
15	0	0.56	0.56	2.21	—	—	2.21	3.44	3.44	4
20	0	0.79	0.79	1.99	1.99	2.01	2.01	3.21	3.21	4
25	0	0.95	0.95	1.89	1.89	2.11	2.11	3.05	3.05	4
30	0	1.07	1.07	1.83	1.83	2.17	2.17	2.93	2.93	4

- A: 正の系列相関あり
- B: 系列相関の有無を判定不能
- C: 系列相関なし
- D: 系列相関の有無を判定不能
- E: 負の系列相関あり

表 5: ダービン・ワトソン統計量の 5% 点の上限と下限

T	$k' = 1$		$k' = 2$		$k' = 3$		$k' = 4$		$k' = 5$	
	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du
15	1.08	1.36	0.95	1.54	0.82	1.75	0.69	1.97	0.56	2.21
16	1.10	1.37	0.98	1.54	0.86	1.73	0.74	1.93	0.62	2.15
17	1.13	1.38	1.02	1.54	0.90	1.71	0.78	1.90	0.67	2.10
18	1.16	1.39	1.05	1.53	0.93	1.69	0.82	1.87	0.71	2.06
19	1.18	1.40	1.08	1.53	0.97	1.68	0.86	1.85	0.75	2.02
20	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68	0.90	1.83	0.79	1.99
21	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	0.93	1.81	0.83	1.96
22	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	0.96	1.80	0.86	1.94
23	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66	0.99	1.79	0.90	1.92
24	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	0.93	1.90
25	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	0.95	1.89
26	1.30	1.46	1.22	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	0.98	1.88
27	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.01	1.86
28	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85
29	1.34	1.48	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84
30	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83
31	1.36	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	1.09	1.83
32	1.37	1.50	1.31	1.57	1.24	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82
33	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81
34	1.39	1.51	1.33	1.58	1.27	1.65	1.21	1.73	1.15	1.81
35	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80
36	1.41	1.52	1.35	1.59	1.29	1.65	1.24	1.73	1.18	1.80
37	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.80
38	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.21	1.79
39	1.43	1.54	1.38	1.60	1.33	1.66	1.27	1.72	1.22	1.79
40	1.44	1.54	1.39	1.60	1.34	1.66	1.29	1.72	1.23	1.79
45	1.48	1.57	1.43	1.62	1.38	1.67	1.34	1.72	1.29	1.78
50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77
55	1.53	1.60	1.49	1.64	1.45	1.68	1.41	1.72	1.38	1.77
60	1.55	1.62	1.51	1.65	1.48	1.69	1.44	1.73	1.41	1.77
65	1.57	1.63	1.54	1.66	1.50	1.70	1.47	1.73	1.44	1.77
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.52	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77
75	1.60	1.65	1.57	1.68	1.54	1.71	1.51	1.74	1.49	1.77
80	1.61	1.66	1.59	1.69	1.56	1.72	1.53	1.74	1.51	1.77
85	1.62	1.67	1.60	1.70	1.57	1.72	1.55	1.75	1.52	1.77
90	1.63	1.68	1.61	1.70	1.59	1.73	1.57	1.75	1.54	1.78
95	1.64	1.69	1.62	1.71	1.60	1.73	1.58	1.75	1.56	1.78
100	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78

u_i を消去すると,

$$(Y_i - \rho Y_{i-1}) = \alpha(1 - \rho) + \beta(X_i - \rho X_{i-1}) + \epsilon_i,$$

となり,

$$Y_i^* = (Y_i - \rho Y_{i-1}),$$

$$X_i^* = (X_i - \rho X_{i-1})$$

を新たな変数として,

$$Y_i^* = \alpha' + \beta X_i^* + \epsilon_i,$$

に最小二乗法を適用する。 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ は互いに独立とするので, 最小二乗法を適用が可能となる。ただし, $\alpha' = \alpha(1 - \rho)$ の関係が成り立つことに注意。

より一般的に, 回帰式が

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + u_i,$$

$$u_i = \rho u_{i-1} + \epsilon_i,$$

のときの推定を考える。ただし, $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ は互いに独立とする。

u_i を消去すると,

$$\begin{aligned} (Y_i - \rho Y_{i-1}) &= \beta_1 (X_{1i} - \rho X_{1,i-1}) \\ &+ \beta_2 (X_{2i} - \rho X_{2,i-1}) \\ &+ \dots \\ &+ \beta_k (X_{ki} - \rho X_{k,i-1}) + \epsilon_i, \end{aligned}$$

となり,

$$Y_i^* = (Y_i - \rho Y_{i-1}),$$

$$X_{1i}^* = (X_{1i} - \rho X_{1,i-1}),$$

$$X_{2i}^* = (X_{2i} - \rho X_{2,i-1}),$$

$\dots,$

$$X_{ki}^* = (X_{ki} - \rho X_{k,i-1})$$

を新たな変数として,

$$Y_i^* = \beta_1 X_{1i}^* + \beta_2 X_{2i}^* + \dots + \beta_k X_{ki}^* + \epsilon_i$$

最小二乗法を適用する。 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ は互いに独立とするので, 最小二乗法を適用が可能となる。

ρ の求め方について

1. ダービン・ワトソン比がゼロに近い場合, $\rho = 1$ と近似して,

$$Y_i^* = \beta_1 X_{1i}^* + \beta_2 X_{2i}^* + \dots + \beta_k X_{ki}^* + \epsilon_i,$$

として推定する。ただし, $Y_i^* = Y_i - Y_{i-1}$, $X_{1i}^* = X_{1i} - X_{1,i-1}$ とする。

2. DW は近似的に $DW \approx 2(1 - \hat{\rho})$ と表されるので, DW から ρ の推定値 $\hat{\rho}$ を逆算して,

$$Y_i^* = (Y_i - \hat{\rho} Y_{i-1}),$$

$$X_{1i}^* = (X_{1i} - \hat{\rho} X_{1,i-1}),$$

$$X_{2i}^* = (X_{2i} - \hat{\rho} X_{2,i-1}),$$

$\dots,$

$$X_{ki}^* = (X_{ki} - \hat{\rho} X_{k,i-1})$$

を新たな変数として,

$$Y_i^* = \beta_1 X_{1i}^* + \beta_2 X_{2i}^* + \dots + \beta_k X_{ki}^* + \epsilon_i,$$

に最小二乗法を適用する。

3. 収束計算によって求める。

- (i) まず,

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + u_i,$$

に最小二乗法を適用し, $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n$ を求める。

- (ii) 次に,

$$\hat{u}_i = \rho \hat{u}_{i-1} + \epsilon_i,$$

に最小二乗法を適用し, $\hat{\rho}$ を求める。

- (iii) データを変換する。すなわち,

$$Y_i^* = (Y_i - \hat{\rho} Y_{i-1}),$$

$$X_{1i}^* = (X_{1i} - \hat{\rho} X_{1,i-1}),$$

$$X_{2i}^* = (X_{2i} - \hat{\rho} X_{2,i-1}),$$

$\dots,$

$$X_{ki}^* = (X_{ki} - \hat{\rho} X_{k,i-1})$$

を新たな変数として,

$$Y_i^* = \beta_1 X_{1i}^* + \beta_2 X_{2i}^* + \dots + \beta_k X_{ki}^* + \epsilon_i,$$

を計算して, $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k$ を求める。

- (iv) さらに,

$$\hat{u}_i = Y_i - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \dots - \hat{\beta}_k X_{ki},$$

から \hat{u}_i を再計算して,

$$\hat{u}_i = \rho \hat{u}_{i-1} + \epsilon_i,$$

から, 最小二乗法により $\hat{\rho}$ を求める。

- (v) (iii) と (iv) を収束するまで繰り返す。

(iv) で得られた $\hat{\rho}$ の有意性から, $H_0: \rho = 0$ の検定を行う方法もある。

11.3 遅れのある変数 (再考)

習慣的效果を考慮に入れたモデル：

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \gamma y_{t-1} + u_t,$$

ラグ付き内生変数が説明変数に用いられる。

x_t の y_t への効果は、短期効果、長期効果の2つある。 β は短期効果を表す係数である。長期効果とは、 $y_t = y_{t-1}$ となるときの、 x_t から y_t への影響を示す効果である。

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \gamma y_t + u_t,$$

として、 y_t について解くと、

$$y_t = \frac{\alpha}{1-\gamma} + \frac{\beta}{1-\gamma} x_t + \frac{1}{1-\gamma} u_t,$$

となり、 $\frac{\beta}{1-\gamma}$ が x_t の y_t への長期効果を表す係数となる。

問題点：

1. 最小二乗法の仮定の一つに、説明変数は確率変数ではないという仮定がある。ラグ付き内生変数を説明変数に加えることによって、この仮定が満たされなくなる。最小二乗推定量は最小分散線型不偏推定量ではなくなる。
2. y_t と x_t とは、経済理論的に考えると、相関が高いはず。 y_t と y_{t-1} は相関が高い。当然、 y_{t-1} と x_t も高い相関を示す。
⇒ 多重共線性の可能性が高い。
3. DW 統計量は意味をなさない (詳細略)。実際には誤差項に系列相関があるにもかかわらず、標本数 (データ数) が増えるにつれて、DW は 2 に近づいてしまう。すなわち、系列相関なしと判定されてしまう。

⇒ 代わりに、 h 統計量を使う。

h 統計量は次のように求められる。

$$h = \hat{\rho} \sqrt{\frac{T}{1 - T s_{\hat{\gamma}}^2}},$$

T は標本数 (データ数)、 $s_{\hat{\gamma}}$ は $\hat{\gamma}$ の標準誤差、 $\hat{\rho}$ は $\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^T \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=2}^T \hat{u}_{t-1}^2}$ で、 \hat{u}_t はもとのモデルの最小二乗法による残差である。

帰無仮説は、 $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$ のモデルにおいて、 $H_0 : \rho = 0$ であり、対立仮説は $H_1 : \rho \neq 0$ である。帰無仮説 $H_0 : \rho = 0$ のもとで、標本数 T が増加するにつれて、 h は標準正規分布に近づくことが知られている。よって、

- (a) $|h| > z_{\alpha/2}$ のとき、有意水準 100 % で H_0 を棄却する。
- (b) $|h| < z_{\alpha/2}$ のとき、有意水準 100 % で H_0 を採択する。

ただし、 $z_{\alpha/2}$ は標準正規分布表から得られた $100 \times \frac{\alpha}{2}$ % 点の値である。

12 不均一分散 (不等分散)

回帰式が

$$y_t = \alpha + \beta x_t + u_t$$

の場合を考える。 x_t が外生変数、 y_t は内生変数、 u_t は互いに独立な同一の分布を持つ攪乱項 (最小二乗法に必要な仮定) とする。「独立な同一の分布」の意味は「攪乱項 u_1, u_2, \dots, u_T はそれぞれ独立に平均ゼロ、分散 σ^2 の分布する」である。

分散が時点に依存する場合、代表的には、分散が他の変数 (例えば、 z_t) に依存する場合、すなわち、 u_t の平均はゼロ、分散は $\sigma_*^2 z_t^2$ の場合は、最小二乗法の仮定に反する。そのため、単純には、 $y_t = \alpha + \beta x_t + u_t$ に最小二乗法を適用できない。以下のような修正が必要となる。

$$\begin{aligned} \frac{y_t}{z_t} &= \alpha \frac{1}{z_t} + \beta \frac{x_t}{z_t} + \frac{u_t}{z_t} \\ &= \alpha \frac{1}{z_t} + \beta \frac{x_t}{z_t} + u_t^* \end{aligned}$$

このとき、新たな攪乱項 u_t^* は平均ゼロ、分散 σ_*^2 の分布となる (すなわち、「同一の」分布)。

$$E(u_t^*) = E\left(\frac{u_t}{z_t}\right) = \left(\frac{1}{z_t}\right) E(u_t) = 0$$

u_t の仮定 $E(u_t) = 0$ が使われている。

$$V(u_t^*) = V\left(\frac{u_t}{z_t}\right) = \left(\frac{1}{z_t}\right)^2 V(u_t) = \sigma_*^2$$

u_t の仮定 $V(u_t) = \sigma_*^2 z_t^2$ が最後に使われている。

よって、 $\frac{y_t}{z_t}, \frac{1}{z_t}, \frac{x_t}{z_t}$ を新たな変数として、最小二乗法を適用することができる。

不均一分散の検定について

$$\hat{u}_t^2 = \gamma z_t + \epsilon_t$$

を推定し、 γ の推定値 $\hat{\gamma}$ の有意性の検定を行う (通常の t 検定)。

z_t は回帰式に含まれる変数でもよい。例えば、 u_t の平均はゼロ、分散は $\sigma_*^2 x_t^2$ の場合、各変数を x_t で割って、

$$\begin{aligned} \frac{y_t}{x_t} &= \alpha \frac{1}{x_t} + \beta + \frac{u_t}{x_t} \\ &= \alpha \frac{1}{x_t} + \beta + u_t^* \end{aligned}$$

を推定すればよい。 β は定数項として推定されるが、意味は限界係数 (すなわち、傾き) と同じなので注意すること。

13 応用例

13.1 マクロの消費関数

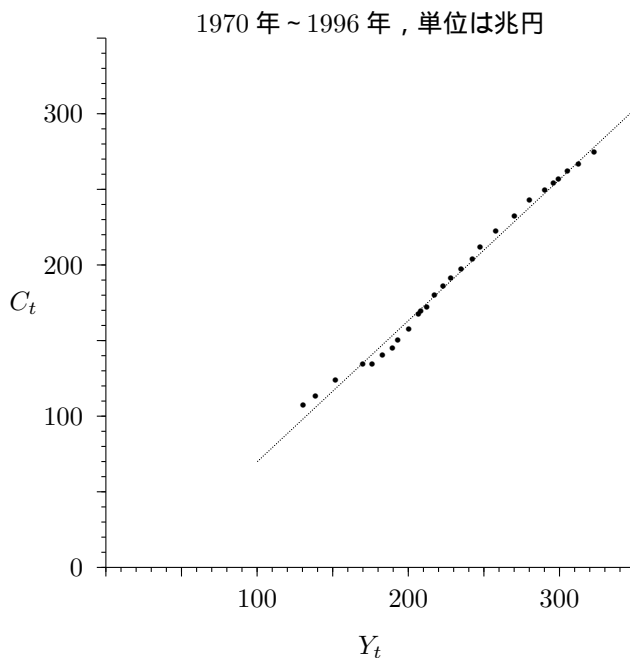
1. 所得から税金を差し引いたものを可処分所得と呼ぶが、可処分所得 (Y) が増えれば消費 (C) も増える。
2. この関数を $C = \alpha + \beta Y$ という線形 (一次式) によって表されると仮定しよう。
3. この場合、経済学では、 α は基礎消費、 β は限界消費性向と呼ばれる。
4. α で表される基礎消費とは所得がなくても日常生活に最低限必要な消費 (すなわち、衣食住宅費等) であり、 β の限界消費性向とは所得が 1 円増えれば消費はいくら増えるのかという指標である。
5. α, β はパラメータと呼ばれ、未知である。
6. C や Y は『国民経済計算年報』(経済企画庁編) から「国内家計最終消費支出」「家計国民可処分所得」という項目で、それぞれデータは公表される。
7. ここでは、平成 10 年版の『国民経済計算年報』のデータを扱う。

表 6: 所得と消費のデータ

暦年	国内家計 最終支出	家計可処分 所得	国内家計 最終支出 デレータ
1970	37784.1	45913.2	35.2
1971	42571.6	51944.3	37.5
1972	49124.1	60245.4	39.7
1973	59366.1	74924.8	44.1
1974	71782.1	93833.2	53.3
1975	83591.1	108712.8	59.4
1976	94443.7	123540.9	65.2
1977	105397.8	135318.4	70.1
1978	115960.3	147244.2	73.5
1979	127600.9	157071.1	76.0
1980	138585.0	169931.5	81.6
1981	147103.4	181349.2	85.4
1982	157994.0	190611.5	87.7
1983	166631.6	199587.8	89.5
1984	175383.4	209451.9	91.8
1985	185335.1	220655.6	93.9
1986	193069.6	229938.8	94.8
1987	202072.8	235924.0	95.3
1988	212939.9	247159.7	95.8
1989	227122.2	263940.5	97.7
1990	243035.7	280133.0	100.0
1991	255531.8	297512.9	102.5
1992	265701.6	309256.6	104.5
1993	272075.3	317021.6	105.9
1994	279538.7	325655.7	106.7
1995	283245.4	331967.5	106.2
1996	291374.8	342303.0	106.0

- 『国民経済計算年報』から「国内家計最終消費支出」と「家計国民可処分所得」の1970年～1996年の年次データ(時系列データの種類は年次データ, 四半期データ, 月次データ等がある)を取ってくる。
- 計量分析で重要なことは, 名目値でなく実質値をとることである。
- 実質値とはある基準となる年を定めて, その年の物価で生のデータ(名目値)を変換するということである。
- 実質値 = $\frac{\text{名目値}}{\text{物価指数}}$ という関係が成り立つ。(ここで「物価指数」は基準年次を1とした場合のもので, もし基準年次が100ならば, 実質値 = $\frac{\text{名目値}}{\text{物価指数}/100}$ とする必要がある。)
- 異なる時点間でデータを比較する場合, それぞれの時点で物価が異なるので, 物価の変動を取り除いたデータで比較する必要がある。
- ここで用いられる国内家計最終消費支出 C_t と家計国民可処分所得 Y_t のデータは名目データであり, 実質データに変換する必要がある。
- 1990年の「国内家計最終消費支出デフレーター」は100なので, 基準年次は1990年となる。
- 1990年の貨幣価値に変換することを, 1990年価格で実質化するという。

図1: 実質消費(縦軸)と実質所得(横軸)



2. $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ から, α, β の符号を統計的に調べる。

- データ数は27, 推定すべきパラメータ数は2なので, 自由度は $27 - 2 = 25$ となる。
- $\alpha = 0.05$ のとき $t_{\alpha/2}(25) = 2.060$, $\alpha = 0.01$ のとき $t_{\alpha/2}(25) = 2.787$ である。
- 有意水準 0.05 のとき,

$$\frac{-23216.7}{3844.54} = -6.039 < -t_{0.005}(25) = -2.060,$$

$$\frac{.933542}{.016333} = 57.16 > t_{0.005}(25) = 2.060,$$

となり, 共に統計的に有意である。

- したがって, 実証結果から, 真の基礎消費 α は負, 真の限界消費性向 β は正という結論になる。
- $\beta > 0$ を統計的に示したが, 本当は $\beta < 1$ も示すべきである。(省略)
- 基礎消費は正となるべきなので, 経済理論と矛盾する。
- 次に行うべき分析は, なぜ矛盾したかを追求すること。

⇒ 最初に考えた理論が間違っていた, 構造変化のためだった, 推定式が最小二乗法の仮定を満たしていなかった, ……

まず最初に,

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma^2),$$

の推定を行う。ただし, u_t は互いに独立に正規分布するものと仮定する。

$$C_t = \frac{-23216.7}{(3844.54)} + \frac{.933542}{(.016333)} Y_t,$$

$$R^2 = .992406, \quad \bar{R}^2 = .992102,$$

$$s = 4557.04, \quad DW = .289838,$$

ただし, 係数の推定値の下の括弧内は, 係数推定値の標準誤差を表すものとする。

- 推定値の符号条件について, 基礎消費の推定値 $\hat{\alpha}$ は -23216.7 で負, 限界消費性向の推定値 $\hat{\beta}$ は 0.933542 で正となっている。基礎消費については符号条件を満たさないが, 限界消費性向は符号条件を満たす。

3. $s = 4557.04$ は、誤差項 u_t の標準偏差 σ^2 の推定値 (すなわち、回帰の標準誤差) である。

4. 自由度修正済み決定係数は $\bar{R}^2 = 0.992102$ であり、非常に 1 に近い値が得られたことから、消費と所得の間の関係を表す回帰式の当てはまりは非常に良いと言える。

5. DW について、 $T = 27$, $k = 2$ の 5% 点の値は $dl = 1.32$, $du = 1.47$ であるので、5% で、

(a) $DW < 1.32$ のとき、誤差項に正の系列相関がある。

(b) $1.32 \leq DW < 1.47$ のとき、判定不能。

(c) $1.47 \leq DW < 2.53$ のとき、誤差項に系列相関はない。

(d) $2.53 \leq DW < 2.68$ のとき、判定不能。

(e) $2.68 \leq DW$ のとき、誤差項に負の系列相関がある。

となる。

この場合、 $DW = 0.289838$ なので、誤差項に正の系列相関が見られる。

⇒ 最小二乗法の仮定を満たしていない。

次に、誤差項に系列相関 (一階の自己相関) があるモデル

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + u_t,$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t,$$

の推定を行う。ただし、 ϵ_t は互いに独立に正規分布するものと仮定する。

ρ の推定値 $\hat{\rho}$ は、最小二乗法の推定結果の DW を用いて、 $\hat{\rho} = 1 - \frac{DW}{2} = 1 - \frac{.289838}{2} = .855081$ を得る。データを、次のように変換する。

$$C_t^* = C_t - \hat{\rho} C_{t-1},$$

$$Y_t^* = Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1},$$

そして、

$$C_t^* = \alpha' + \beta Y_t^* + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2),$$

を推定する。ただし、 $\alpha' = \alpha(1 - \rho)$ に注意。

結果は、以下の通りとなる。

$$C_t^* = \underset{(2183.63)}{-3679.78} + \underset{(.054012)}{.930350} Y_t^*,$$

$$R^2 = .922288, \quad \bar{R}^2 = .919180,$$

$$s = 2232.08, \quad DW = 1.35684,$$

ただし、係数の推定値の下の括弧内は、係数推定値の標準誤差を表すものとする。

1. 基礎消費の推定値 $\hat{\alpha}$ は、 $\hat{\alpha} = \frac{\hat{\alpha}'}{1 - \hat{\rho}}$ によって求められ、 $\frac{-3679.78}{1 - .855081} = -25392.0$ で負、限界消費性向の推定値 $\hat{\beta}$ は .930350 で正となる。

2. 真の基礎消費の符号を統計的に調べる。基礎消費 α の符号は α' の符号と同じなので、 α' の符号を $\hat{\alpha}'$ から調べる。

有意水準 0.05 のとき、

$$\frac{-3679.78}{2183.63} = -1.685 > -t_{0.005}(25) = -2.060,$$

となり、 α' が負だとは言えない。

3. α は正の可能性もある。

4. したがって、推定結果から、最初に考えた理論モデルが間違っているとは言えない。

5. β について、有意水準 0.05 のとき、

$$\frac{.930350}{.054012} = 17.225 > t_{0.005}(25) = 2.060,$$

となり、統計的に有意である。

6. $s = 2232.08$ は、誤差項 ϵ_t の標準偏差 σ_ϵ^2 の推定値 (すなわち、回帰の標準誤差) である。

7. 自由度修正済み決定係数 \bar{R}^2 について、最初の推定結果では 0.992102 となり、今回の推定結果では .919180 と小さくなっている。

⇒ 「回帰式の当てはまりが悪くなった」と考えるのは間違い。

被説明変数の値自体が、最初の推定結果と今回のものとは異なるため、 \bar{R}^2 の比較は不適當。

⇒ 回帰の標準誤差 (4557.04 と 2232.08) で比較すべき。後者の方が小さいため、後者の方が回帰式の当てはまりは良いと言える。

8. DW も 1.35684 となり, $1.32 \leq DW < 1.47$ である
ので, 系列相関の有無を判定できない。

⇒ 「明らかに誤差項に系列相関がある」とは言えない。