推定 (まとめ)

点推定

母数		推定量		推定値
母平均	μ	標本平均	$\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	$\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
母分散	σ^2	標本不偏分散	$S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$	$s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$
母比率	p	標本比率 (?)	$\widehat{P} = \dfrac{R}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	$\widehat{p} = \dfrac{x}{n}$

$\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ は大きさ n の標本，$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ はその実現値
確率変数 R の実現値 x

推定量の性質：

推定量	不偏性	一致性	有効性
$\overline{X}$	○	○	○
S^2	○	○	×
$\widehat{P}$	○	○	○

区間推定

母平均 μ の区間推定

◎ 正規母集団

大きさ n の無作為標本 $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$。すべての $i = 1, 2, \cdots, n$ について，$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ とする。

母分散 σ^2 が既知のとき：

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \qquad \Longrightarrow \qquad P\left(\left|\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$z_{\alpha/2}$ は $100 \times \dfrac{\alpha}{2}$ % 点で，確率 α が与えられると，正規分布表 (P.169) から得られる。

したがって，$P\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$

$\overline{X}$ を $\overline{x}$ で置き換えて，信頼係数 $1 - \alpha$ の μ の信頼区間：$\Longrightarrow$ $\boxed{\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$

母分散 σ^2 が未知のとき：

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \qquad \Longrightarrow \qquad P\left(\left|\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}\right| < t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1 - \alpha$$

$t_{\alpha/2}(n-1)$ は $100 \times \dfrac{\alpha}{2}$ % 点で，確率 α と自由度 $n - 1$ が与えられると，t 分布表 (P.171) から得られる。

したがって，$P\left(\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$

$\overline{X}$, S^2 を $\overline{x}$, s^2 で置き換えて，信頼係数 $1 - \alpha$ の μ の信頼区間：$\Longrightarrow$ $\boxed{\left(\overline{x} - t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right)}$

◎ **非正規母集団 (大標本, すなわち，n が大きいとき)**

大きさ n の無作為標本 $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$
すべての $i = 1, 2, \cdots, n$ について，$X_i \sim (\mu, \sigma^2)$ とする (正規分布を仮定する必要ない)。

母分散 σ^2 が既知のとき： n が大きいとき，中心極限定理 (定理 6.1, P.65) により，以下が成り立つ。

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \qquad \Longrightarrow \qquad P\Big(\Big|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\Big| < z_{\alpha/2}\Big) \approx 1-\alpha$$

したがって，$P\Big(\overline{X} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big) \approx 1-\alpha$

$\overline{X}$ を $\overline{x}$ で置き換えて，信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間：$\Longrightarrow \boxed{\Big(\overline{x} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big)}$

母分散 σ^2 が未知のとき： さらに，分母の σ^2 を標本不偏分散 S^2 で置き換えて，近似する。

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \qquad \Longrightarrow \qquad P\Big(\Big|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\Big| < z_{\alpha/2}\Big) \approx 1-\alpha$$

したがって，$P\Big(\overline{X} - z_{\alpha/2}\dfrac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\alpha/2}\dfrac{S}{\sqrt{n}}\Big) \approx 1-\alpha$

$\overline{X}$, S^2 を $\overline{x}$, s^2 で置き換えて，信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間：$\Longrightarrow \boxed{\Big(\overline{x} - z_{\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}}\Big)}$

母分散 σ^2 の区間推定

(略)

母比率 p の区間推定

中心極限定理により，近似的に，

$$\frac{\widehat{P}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0,1)$$

を得る。
さらに，分母の p をその推定量 $\widehat{P}$ で置き換えて，近似する。

$$\frac{\widehat{P}-p}{\sqrt{\widehat{P}(1-\widehat{P})/n}} \sim N(0,1) \qquad \Longrightarrow \qquad P\Bigg(\Bigg|\frac{\widehat{P}-p}{\sqrt{\widehat{P}(1-\widehat{P})/n}}\Bigg| < z_{\alpha/2}\Bigg) \approx 1-\alpha$$

したがって，$P\Bigg(\widehat{P} - z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\widehat{P}(1-\widehat{P})}{n}} < p < \widehat{P} + z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\widehat{P}(1-\widehat{P})}{n}}\Bigg) \approx 1-\alpha$

$\widehat{P}$ を $\widehat{p}$ で置き換えて，信頼係数 $1-\alpha$ の p の信頼区間：$\Longrightarrow \boxed{\Bigg(\widehat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}, \widehat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\Bigg)}$

仮説検定 (まとめ)

検定の種類

母平均 μ の検定

◎ 正規母集団

大きさ n の無作為標本 $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$。$i = 1, 2, \cdots, n$ について，$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ とする。

母分散 σ^2 は既知のとき： $\overline{X}$ の分布は，$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ なので，帰無仮説 H_0： $\mu = \mu_0$ が正しいもとで，

$\boxed{\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)}$ となる (μ を μ_0 で置き換える)。このとき，検定統計量 $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$。検定統計量の値 $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$。

1. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu < \mu_0}$** (片側検定)
   $P\Big(\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha\Big) = \alpha$ なので，$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 H_0： $\mu = \mu_0$ を棄却する。
2. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu > \mu_0}$** (片側検定)
   $P\Big(\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha\Big) = \alpha$ なので，$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 H_0： $\mu = \mu_0$ を棄却する。
3. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu \neq \mu_0}$** (両側検定)
   $P\Big(\Big|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\Big| > z_{\alpha/2}\Big) = \alpha$ なので，$\Big|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\Big| > z_{\alpha/2}$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 H_0： $\mu = \mu_0$ を棄却する。

母分散 σ^2 は未知のとき： $\overline{X}$ の分布は，$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ なので，帰無仮説 H_0 ： $\mu = \mu_0$ が正しいもとで，

$\boxed{\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)}$ となる (μ を μ_0 で置き換える)。このとき，検定統計量 $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$。検定統計量の値 $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$。

1. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu < \mu_0}$** (片側検定)
   $P\Big(\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < -t_\alpha(n-1)\Big) = \alpha$ なので，$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} < -t_\alpha(n-1)$ のとき，有意水準 α で H_0： $\mu = \mu_0$ を棄却する。
2. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu > \mu_0}$** (片側検定)
   $P\Big(\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_\alpha(n-1)\Big) = \alpha$ なので，$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_\alpha(n-1)$ のとき，有意水準 α で H_0： $\mu = \mu_0$ を棄却する。
3. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu \neq \mu_0}$** (両側検定)
   $P\Big(\Big|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\Big| > t_{\alpha/2}(n-1)\Big) = \alpha$ なので，$\Big|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\Big| > t_{\alpha/2}(n-1)$ のとき，有意水準 α で H_0： $\mu = \mu_0$ を棄却する。

◎ 非正規母集団 (大標本，すなわち，$\boldsymbol{n}$ が大きいとき)

大きさ n の無作為標本 $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$。$i = 1, 2, \cdots, n$ について，$X_i \sim (\mu, \sigma^2)$ とする (正規分布の仮定は不必要)。

母分散 σ^2 は既知のとき： 近似的に $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ が成り立つので，帰無仮説 $H_0:\ \mu = \mu_0$ が正しいもとで，$\boxed{\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)}$ となる (μ を μ_0 で置き換える)。このとき，検定統計量 $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$。検定統計量の値 $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$。

1. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu < \mu_0}$** (片側検定)
   $P\Big(\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha\Big) \approx \alpha$ なので，$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 $H_0:\ \mu=\mu_0$ を棄却する。
2. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu > \mu_0}$** (片側検定)
   $P\Big(\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha\Big) \approx \alpha$ なので，$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 $H_0:\ \mu=\mu_0$ を棄却する。
3. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu \neq \mu_0}$** (両側検定)
   $P\Big(\Big|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\Big| > z_{\alpha/2}\Big) \approx \alpha$ なので，$\Big|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\Big| > z_{\alpha/2}$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 $H_0:\ \mu=\mu_0$ を棄却する。

母分散 σ^2 は未知のとき： 近似的に，$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ が成り立つので，帰無仮説 $H_0:\ \mu = \mu_0$ が正しいもとで，$\boxed{\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim N(0,1)}$ となる (μ を μ_0 で置き換える)。このとき，検定統計量 $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$。検定統計量の値 $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$。

1. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu < \mu_0}$** (片側検定)
   $P\Big(\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < -z_\alpha\Big) \approx \alpha$ なので，$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} < -z_\alpha$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 $H_0:\ \mu=\mu_0$ を棄却する。
2. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu > \mu_0}$** (片側検定)
   $P\Big(\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} > z_\alpha\Big) \approx \alpha$ なので，$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} > z_\alpha$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 $H_0:\ \mu=\mu_0$ を棄却する。
3. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu \neq \mu_0}$** (両側検定)
   $P\Big(\Big|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\Big| > z_{\alpha/2}\Big) \approx \alpha$ なので，$\Big|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\Big| > z_{\alpha/2}$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 $H_0:\ \mu=\mu_0$ を棄却する。

2 つの標本の母平均の差（H_0： $\mu_1 = \mu_2$）の検定

◎ 正規母集団

- **第 1 グループ：**大きさ n_1 の無作為標本。$i = 1, 2, \cdots, n$ について，$X_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ とする。
- **第 2 グループ：**大きさ n_2 の無作為標本。$i = 1, 2, \cdots, n$ について，$X_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ とする。

σ_1^2 と σ_2^2 は既知のとき： 母平均の差を検定したいので，統計量 $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ の分布を考える。

定理 4.1 (P.42)，定理 4.5 (P.47) より，$\mathrm{E}(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$，また，定理 4.3 (P.43)，定理 4.8 (P.49) より，$\mathrm{V}(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}$ を得る。したがって，$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2})$ が成り立つ (証明略)。さらに，標準化によって，

$\dfrac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1)$ を得るので，帰無仮説 H_0： $\mu_1=\mu_2$ が正しいもとで， $\boxed{\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1)}$ となる ($\mu_1-\mu_2=0$ を代入する)。このとき，検定統計量 $\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}$。検定統計量の値 $\dfrac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}$。

1. **対立仮説 H_1： $\mu_1<\mu_2$** (片側検定)
   $P\Big(\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}<-z_\alpha\Big)\approx\alpha$ なので， $\dfrac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}<-z_\alpha$ のとき，有意水準 α で H_0 を棄却する。
2. **対立仮説 H_1： $\mu_1>\mu_2$** (片側検定)
   $P\Big(\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}>z_\alpha\Big)\approx\alpha$ なので， $\dfrac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}>z_\alpha$ のとき，有意水準 α で H_0 を棄却する。
3. **対立仮説 H_1： $\mu_1\neq\mu_2$** (両側検定)
   $P\Big(\Big|\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\Big|>z_{\alpha/2}\Big)\approx\alpha$ なので， $\Big|\dfrac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\Big|>z_{\alpha/2}$ のとき，有意水準 α で H_0 を棄却する。

σ_1^2 と σ_2^2 は未知のとき： 小標本の場合，検定統計量の分布を導出できないため，検定不可能 (正規分布や t 分布にはならない)。

大標本の場合，正規分布で近似。

◎ 非正規母集団 (大標本，すなわち，n_1, n_2 が共に大きいとき)

- **第 1 グループ：** 大きさ n_1 の無作為標本。$i=1,2,\cdots,n$ について，$X_{1i}\sim(\mu_1,\sigma_1^2)$ とする (正規分布の仮定は不必要)。
- **第 2 グループ：** 大きさ n_2 の無作為標本。$i=1,2,\cdots,n$ について，$X_{2i}\sim(\mu_2,\sigma_2^2)$ とする (正規分布の仮定は不必要)。

σ_1^2 と σ_2^2 は既知のとき： 近似的に， $\dfrac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1)$ を得るので，帰無仮説 H_0： $\mu_1=\mu_2$ が正しいもとで， $\boxed{\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1)}$ となる ($\mu_1-\mu_2=0$ を代入する)。このとき，検定統計量 $\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}$。検定統計量の値 $\dfrac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}$。

1. **対立仮説 H_1： $\mu_1<\mu_2$** (片側検定)
   $P\Big(\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}<-z_\alpha\Big)\approx\alpha$ なので， $\dfrac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}<-z_\alpha$ のとき，有意水準 α で H_0 を棄却する。
2. **対立仮説 H_1： $\mu_1>\mu_2$** (片側検定)
   $P\Big(\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}>z_\alpha\Big)\approx\alpha$ なので， $\dfrac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}>z_\alpha$ のとき，有意水準 α で H_0 を棄却する。

3. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu_1 \neq \mu_2}$** (両側検定)

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\right|>z_{\alpha/2}\right)\approx\alpha \text{ なので，} \left|\frac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\right|>z_{\alpha/2} \text{ のとき，有意水準 } \alpha \text{ で } H_0 \text{ を棄却する。}$$

$\boldsymbol{\sigma_1^2}$ と $\boldsymbol{\sigma_2^2}$ は未知のとき： 近似的に，$\dfrac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{S_1^2/n_1+S_2^2/n_2}}\sim N(0,1)$ を得るので，帰無仮説 H_0： $\mu_1=\mu_2$ が正しいもとで，$\boxed{\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{S_1^2/n_1+S_2^2/n_2}}\sim N(0,1)}$ となる ($\mu_1-\mu_2=0$ を代入する)。このとき，検定統計量 $\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{S_1^2/n_1+S_2^2/n_2}}$。検定統計量の値 $\dfrac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{s_1^2/n_1+s_2^2/n_2}}$。

1. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu_1 < \mu_2}$** (片側検定)

$$P\left(\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{S_1^2/n_1+S_2^2/n_2}}<-z_\alpha\right)\approx\alpha \text{ なので，} \frac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{s_1^2/n_1+s_2^2/n_2}}<-z_\alpha \text{ のとき，有意水準 } \alpha \text{ で } H_0 \text{ を棄却する。}$$

2. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu_1 > \mu_2}$** (片側検定)

$$P\left(\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{S_1^2/n_1+S_2^2/n_2}}>z_\alpha\right)\approx\alpha \text{ なので，} \frac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{s_1^2/n_1+s_2^2/n_2}}>z_\alpha \text{ のとき，有意水準 } \alpha \text{ で } H_0 \text{ を棄却する。}$$

3. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu_1 \neq \mu_2}$** (両側検定)

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{S_1^2/n_1+S_2^2/n_2}}\right|>z_{\alpha/2}\right)\approx\alpha \text{ なので，} \left|\frac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{s_1^2/n_1+s_2^2/n_2}}\right|>z_{\alpha/2} \text{ のとき，有意水準 } \alpha \text{ で } H_0 \text{ を棄却する。}$$

母比率 p の検定

中心極限定理により，近似的に，$\dfrac{\widehat{P}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}\sim N(0,1)$ を得るので，帰無仮説 H_0 ： $p=p_0$ が正しいもとで，$\boxed{\dfrac{\widehat{P}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\sim N(0,1)}$ となる (p を p_0 で置き換える)。このとき，検定統計量 $\dfrac{\widehat{P}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$。検定統計量の値 $\dfrac{\widehat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$。

1. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu < \mu_0}$** (片側検定)

$$P\left(\frac{\widehat{P}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}<-z_\alpha\right)\approx\alpha \text{ なので，} \frac{\widehat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}<-z_\alpha \text{ のとき，有意水準 } \alpha \text{ で } H_0:\ \mu=\mu_0 \text{ を棄却する。}$$

2. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu > \mu_0}$** (片側検定)

$$P\left(\frac{\widehat{P}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}>z_\alpha\right)\approx\alpha \text{ なので，} \frac{\widehat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}>z_\alpha \text{ のとき，有意水準 } \alpha \text{ で } H_0:\ \mu=\mu_0 \text{ を棄却する。}$$

3. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu \neq \mu_0}$** (両側検定)

$$P\left(\left|\frac{\widehat{P}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\right|>z_{\alpha/2}\right)\approx\alpha \text{ なので，} \left|\frac{\widehat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\right|>z_{\alpha/2} \text{ のとき，有意水準 } \alpha \text{ で } H_0 \text{ を棄却する。}$$