

(上級)統計推理論

(2004年度後期 講義ノート)

平成 16 年 9 月 30 日 (木) 版

谷崎 久志
神戸大学・経済学部

目次

| | | | | | |
|-------|------------------------------|----|---------------------|---|----|
| 1 | 事象と確率 | 1 | 5 | 積率と積率母関数 | 19 |
| 1.1 | 事象 | 1 | 5.1 | 積率母関数 (1 変数) | 19 |
| 1.2 | 確率 | 1 | 5.2 | 積率母関数 (多変数) | 24 |
| 2 | 確率変数と分布 | 2 | 練習問題と解答 (1 章 ~ 5 章) | | 25 |
| 2.1 | 1 次元の確率変数と分布 | 2 | 6 | 大数の法則と中心極限定理 | 34 |
| 2.2 | 多次元の確率変数と分布 | 3 | 6.1 | Chebyshev の不等式 | 34 |
| 2.3 | 2.4 節のための数学の公式 | 4 | 6.2 | 大数の (弱) 法則 (Convergence in probability) | 35 |
| 2.3.1 | 置換積分 | 4 | 6.3 | 中心極限定理 | 35 |
| 2.3.2 | 部分積分 | 5 | 7 | 大数の強法則 (Almost sure convergence) | 36 |
| 2.3.3 | テーラー展開: 関数 $f(x)$ の近似 | 5 | 8 | 統計的推定 | 36 |
| 2.4 | 分布関数の持つ性質の証明 (いくつかの分布を例にとって) | 5 | 8.1 | 推定法と標本平均および標本分散の性質 | 36 |
| 3 | 平均値, 分散 | 7 | 8.1.1 | 推定法 | 36 |
| 3.1 | 平均・分散の定義と公式 | 7 | 8.1.2 | 標本, 統計量, 推定量 | 37 |
| 3.2 | いくつかの分布の平均・分散 | 10 | 8.1.3 | 母平均, 母分散の推定 | 37 |
| 4 | 変数変換と和の分布 (連続型確率変数の場合のみ) | 14 | 8.2 | 点推定法: 最適性 | 38 |
| 4.1 | 一変数の場合 | 14 | 8.3 | 推定量の求め方: 最尤法, 積率法, 最小二乗法 | 42 |
| 4.2 | 二変数の場合 | 16 | 8.3.1 | 最尤法 | 42 |
| | | | 8.3.2 | 積率法 (モーメント法) | 45 |
| | | | 8.3.3 | 最小二乗法 | 46 |

| | | |
|--------|---|----|
| 9 | 標本分布 | 46 |
| 9.1 | 正規母集団の場合 (標本平均, 標本不偏分散の標本分布) | 46 |
| 9.1.1 | 正規分布: 標本平均 \bar{X} の標本分布 | 46 |
| 9.1.2 | χ^2 (カイ自乗) 分布: 標本不偏分散 S^2 の標本分布 | 47 |
| 9.1.3 | t 分布: 標本平均 \bar{X} の標本分布 | 47 |
| 9.1.4 | F 分布 | 48 |
| 9.2 | その他の母集団の場合: 標本平均 \bar{X} の標本分布 | 48 |
| 9.3 | その他の母集団の場合: 母数の推定量 $\hat{\theta}_n$ の標本分布 (一般化) | 49 |
| 10 | 区間推定法 | 50 |
| 10.1 | 母平均 μ の区間推定 | 50 |
| 10.1.1 | 正規母集団の場合 (小標本, 大標本共に) | 50 |
| 10.1.2 | その他の母集団の場合: 大標本 (n が大きいとき) | 50 |
| 10.2 | 母分散 σ^2 の区間推定 (正規母集団) | 51 |
| 10.3 | 母比率 p の区間推定 (ベルヌイ試行) | 51 |
| 11 | 統計的検定 I | 52 |
| 11.1 | 仮説検定の考え方 | 52 |
| 11.2 | 母平均 μ の検定 | 53 |
| 11.2.1 | 正規母集団の場合 (小標本, 大標本共に) | 53 |
| 11.2.2 | その他の母集団の場合: 大標本 (n が大きいとき) | 54 |
| 11.3 | 2つの標本の母平均の差の検定 | 54 |
| 11.3.1 | 小標本 (n_1, n_2 が小さいとき) | 54 |
| 11.3.2 | その他の母集団: 大標本 (n_1, n_2 が共に大きいとき) | 55 |
| 11.4 | 母分散 σ^2 の検定で, 正規母集団の場合 | 56 |
| 11.5 | 2つの標本の母分散が等しいかどうかの検定で, 正規母集団の場合 | 56 |
| 11.6 | 母比率 p の検定 (ベルヌイ試行) | 57 |
| 12 | 統計的検定 II: 大標本検定 | 57 |
| 12.1 | ワルド (Wald) 検定 | 57 |
| 12.2 | 尤度比検定 | 59 |

- この講義ノートは,
<http://ht.econ.kobe-u.ac.jp/~tanizaki/class>
 からダウンロード可。

参考文献

- 『確率統計演習 1 確率』(国沢清典編, 1966, 培風館)
- 『確率統計演習 2 統計』(国沢清典編, 1966, 培風館)
- R.V. Hogg and A.T. Craig, 1995, *Introduction to Mathematical Statistics* (Fifth edition), Prentice Hall.
- H. Tanizaki, 2004, *Computational Methods in Statistics and Econometrics* (STATISTICS: textbooks and monographs, Vol.172), MerceL Dekker.

1 事象と確率

1.1 事象

試行, 標本点, 標本空間

試行: 考察の対象となる実験(または, 観測)を行うこと

標本点 ω : 試行によって得られる個々の結果

標本空間 Ω : 標本点全体の集合

例: サイコロ投げ:

サイコロ投げ 1 回の試行

標本点: 1, 2, 3, 4, 5, 6 の六つ

標本空間: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

事象とその演算

事象 A : 標本空間 Ω の部分集合

ω : 事象 A を構成する標本点の一つ

$\omega \in A$

例: サイコロ投げ:

サイコロ投げ 1 回の試行

$E = \{2, 4, 6\}$: 偶数の目が出る事象

$F = \{1, 2, 3\}$: 3 以下の目が出る事象

和事象: $E \cup F$: 事象 E と F のどちらか一方に属する標本点 ω の全体から成る集合

積事象: $E \cap F$: 事象 E と F のどちらにも属する標本点全体の集合

余事象: E^c : 事象 E に属さない標本点の集合

空事象: ϕ : 標本点を全然含まない事象

全事象: Ω : 全部を含む事象

排反: $E \cap F = \phi$ のとき, 事象 E と F は互いに排反である

例: コイン投げ 3 回

表を H, 裏を T とする。

標本点は次の 8 つ:

$\omega_1 = \{H, H, H\}$,

$\omega_2 = \{H, H, T\}$,

$\omega_3 = \{H, T, H\}$,

$\omega_4 = \{H, T, T\}$,

$\omega_5 = \{T, H, H\}$,

$\omega_6 = \{T, H, T\}$,

$\omega_7 = \{T, T, H\}$,

$\omega_8 = \{T, T, T\}$

標本空間: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$

2 回目が表であるという事象 E :

$E = \{\omega_1, \omega_2, \omega_5, \omega_6\}$

2 回表が出るという事象 F :

$F = \{\omega_2, \omega_3, \omega_5\}$

$E \cup F = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_6\}$

$E \cap F = \{\omega_2, \omega_5\}$

$E^c = \{\omega_3, \omega_4, \omega_7, \omega_8\}$

$F^c = \{\omega_1, \omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$

$(E \cup F)^c = \{\omega_4, \omega_7, \omega_8\}$

$E^c \cap F^c = \{\omega_4, \omega_7, \omega_8\}$

$(E \cup F)^c = E^c \cap F^c \implies$ ド・モルガンの法則

$(E \cap F)^c = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$

$E^c \cup F^c = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$

$(E \cap F)^c = E^c \cup F^c \implies$ ド・モルガンの法則

1.2 確率

事象 A の確率: $P(A)$

$0 \leq P(A) \leq 1$

$P(\Omega) = 1, P(\phi) = 0$

事象 A と B は互いに排反であるとき, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

条件付き確率: 事象 B の条件のもとで事象 A の確率

\implies

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \implies$ 乗法定理

事象 A と B は独立: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

公式:

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \implies$ 加法定理

$A \subset B$ のとき, $P(A) \leq P(B)$

2 確率変数と分布

2.1 1次元の確率変数と分布

確率変数 X : 標本空間 Ω の上で定義された実数値関数 $X = X(\omega)$ を考える。

$X = X(\omega)$: 試行結果 (標本点) ω が定まると X の値が定まる。

$X(\omega)$ がある区間 I の中の値であるような標本点 ω の集合 : $\{\omega; X(\omega) \in I\}$

$\{\omega; X(\omega) \in I\}$ を事象 $\{X \in I\}$ と書く。

離散型確率変数と確率分布 :

確率変数 X の取りうる値を a_1, a_2, \dots とするとき,

$$P(X = a_i) = f(a_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

$f(a_i)$: X の確率分布

性質 :

$$f(a_i) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots$$
$$\sum_i f(a_i) = 1$$

ある集合 A について,

$$P(X \in A) = \sum_{a_i \in A} f(a_i)$$

となる。

連続型確率変数と確率密度関数 :

ある区間 I について,

$$P(X \in I) = \int_I f(x) dx$$

$f(x)$: X の確率密度関数

性質 :

$$f(x) \geq 0,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

また,

$$P(X = x) = \int_x^x f(t) dt = 0,$$

$$P(X \in A) = \int_A f(x) dx$$

分布関数 : $P(X \leq x) = F(x)$

$F(x)$: X の分布関数

性質 :

$x_1 < x_2$ のとき, $F(x_1) \leq F(x_2)$

$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

$F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$

1. 離散型確率変数 :

$$F(x) = \sum_{a_i \leq x} f(a_i),$$

$$F(a_i) - F(a_i - 0) = f(a_i)$$

2. 連続型確率変数 :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt,$$

$$F'(x) = f(x)$$

重要な分布 :

1. ベルヌイ分布 :

離散型確率変数 X の取りうる値は $0, 1$ のどちらかで, その確率分布は,

$$P(X = k) = p^k (1-p)^{1-k}, \quad k = 0, 1$$

$$0 < p < 1$$

2. 2項分布 :

離散型確率変数 X の取りうる値が $0, 1, 2, \dots, n$ で, その確率分布は,

$$P(X = k) = b(k; n, p)$$
$$\equiv {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k},$$
$$k = 0, 1, \dots, n$$

$$0 < p < 1$$

3. ポアソン分布 :

離散型確率変数 X の取りうる値が $0, 1, 2, \dots$ で, その確率分布は,

$$P(X = k) = p(k; \lambda)$$
$$\equiv e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\lambda > 0$$

$np = \lambda$ (一定)のもとで, $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$b(k; n, p) \rightarrow p(k; \lambda)$$

4. 正規分布:

連続型確率変数 X の確率密度関数は,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$N(0, 1) \Rightarrow \text{標準正規分布}$$

5. 一様分布:

連続型確率変数 X の確率密度関数は,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他のとき} \end{cases}$$

6. 指数分布:

連続型確率変数 X の確率密度関数は,

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & 0 < x \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他のとき} \end{cases}$$

$$\lambda > 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \text{ のとき, 自由度 } 2 \text{ のカイ自乗分布に等しい.}$$

7. χ^2 (カイ 2 乗) 分布 (自由度 n):

連続型確率変数 X の確率密度関数は,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} 2^{-\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0 \text{ のとき} \\ 0, & x < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty u^{s-1} e^{-u} du \Rightarrow \text{ガンマ関数}$$

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \Gamma(1) = 1, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

8. t 分布 (自由度 n):

連続型確率変数 X の確率密度関数は,

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

9. Cauchy 分布:

連続型確率変数 X の確率密度関数は,

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

自由度 1 の t 分布に等しい。

2.2 多次元の確率変数と分布

離散型確率変数 X と Y の取りうる値は a_1, a_2, \dots と b_1, b_2, \dots とする。

事象 $\{\omega; X(\omega) = a_i, \text{ かつ } Y(\omega) = b_j\}$ の確率は

$$P(X = a_i, Y = b_j) = h(a_i, b_j)$$

$h(a_i, b_j)$: X, Y の結合確率分布

性質:

$$h(a_i, b_j) \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

$$\sum_{i,j} h(a_i, b_j) = 1$$

$f(a_i), g(b_j)$ を次のように定義する。

$$f(a_i) = \sum_j h(a_i, b_j), \quad i = 1, 2, \dots$$

$$g(b_j) = \sum_i h(a_i, b_j), \quad j = 1, 2, \dots$$

$f(a_i), g(b_j)$: X, Y の周辺確率分布

連続型確率変数 X と Y

ある領域 D について, 事象 $\{\omega; (X(\omega), Y(\omega)) \in D\}$ の確率は

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D h(x, y) dx dy$$

$h(x, y)$: X, Y の結合確率密度関数

性質:

$$h(x, y) \geq 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dx dy = 1$$

$f(x), g(y)$ を次のように定義する。

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dy,$$

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dx,$$

$f(x), g(y)$: X, Y の周辺確率密度関数

条件付き分布:

離散型:

$$\begin{aligned} P(X = a_i | Y = b_j) &= f(a_i | b_j) \\ &= \frac{h(a_i, b_j)}{g(b_j)} \end{aligned}$$

$f(a_i|b_j)$: $Y = b_j$ を与えたもとで X の確率分布

性質:

$$f(a_i|b_j) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$\sum_i f(a_i|b_j) = 1$$

連続型:

$$f(x|y) = \frac{h(x, y)}{g(y)}$$

$f(x|y)$: $Y = y$ を与えたもとで X の確率密度関数

性質:

$$f(x|y) \geq 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x|y) = 1$$

確率変数の独立性:

離散型: $h(a_i, b_j) = f(a_i)g(b_j)$ のとき, X と Y は独立となる。

連続型: $h(x, y) = f(x)g(y)$ のとき, X と Y は独立となる。

重要な分布:

1. 多項分布:

離散型確率変数 X_1, X_2, \dots, X_r について,

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$$

k_1, k_2, \dots, k_r は 0 以上の整数で, $\sum_{i=1}^r k_i = n$ を満たす。

n は自然数

p_1, p_2, \dots, p_r は正の定数で, $\sum_{i=1}^r p_i = 1$ を満たす。

2. 2 変数正規分布:

連続型確率変数 X, Y の結合確率密度関数は

$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right.\right.$$

$$\left.-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \begin{array}{cc} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{array} \right|^{-1/2} \times \exp\left(-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{pmatrix}\right)$$

$\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ は定数で, $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, |\rho| < 1$ とする。

$\exp(x)$ は e^x と同じものであることに注意。

2.3 2.4 節のための数学の公式

2.3.1 置換積分

1 変数: $f(x)$ について, $x = \psi(y)$ の置換積分を行う。

$$\int f(x)dx = \int \psi'(y)f(\psi(y))dy$$

証明:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

$$\implies F'(x) = f(x)$$

$F(x) = F(\psi(y))$ を y について微分する。

$$\frac{dF(\psi(y))}{dy} = \frac{dF(x)}{dx} \frac{dx}{dy} = f(x)\psi'(y) = f(\psi(y))\psi'(y)$$

2 変数: $f(x, y)$ について, $x = \psi_1(u, v), y = \psi_2(u, v)$ のとき,

$$\int f(x, y)dx dy = \int \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right| f(\psi_1(u, v), \psi_2(u, v)) du dv$$

(証明略)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。

$|A| = ad - bc$ を行列式の値と言う。

2.3.2 部分積分

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

証明：

$f(x)g(x)$ の微分を考える。

$$\left(f(x)g(x) \right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

両辺を積分すると，

$$\begin{aligned} \int \left(f(x)g(x) \right)' dx &= \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \\ &= \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \end{aligned}$$

となり，

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

を得る。よって，

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

2.3.3 テーラー展開：関数 $f(x)$ の近似

$x = x_0$ の回りで $f(x)$ をテーラー展開する。

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &\quad + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3 \\ &\quad + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \end{aligned}$$

ただし， $f^{(n)}(x_0)$ は $f(x)$ を n 回微分して， $x = x_0$ で評価したものである。

$f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ と $0! = 1$ に注意。

2.4 分布関数の持つ性質の証明 (いくつかの分布を例にとって)

1. 2項分布 $\sum_{k=0}^n b(k; n, p) = 1$ の証明：

$$\sum_{k=0}^n b(k; n, p)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^n {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= (p + (1-p))^n = 1 \quad (2 \text{ 項定理}) \end{aligned}$$

2. ポアソン分布 $\sum_{k=0}^{\infty} p(k; \lambda) = 1$ の証明：

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} p(k; \lambda) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ に注意。

なぜなら， $f(x) = e^x$ としたとき， $f^{(k)}(x) = e^x$ となる。

テーラー展開の公式は，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

なので， $x_0 = 0$ として， $x = 0$ の回りでテーラー展開すると，

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

を得る。

$f^{(n)}(0) = 1$ に注意。

3. 正規分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数 $f(x)$ について， $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ の証明：

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du \end{aligned}$$

$u = \frac{x - \mu}{\sigma}$ として、置換積分を行う。

$\frac{dx}{du} = \sigma$ に注意

$I = 1$ の証明は $I^2 = 1$ の証明を行えば十分

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du \right) \\ &\quad \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}v^2\right) dv \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(u^2 + v^2)\right) dudv \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) r dr \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\infty} \exp(-s) ds \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} 2\pi [-\exp(-s)]_0^{\infty} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$u = r \cos \theta, v = r \sin \theta$ として置換積分を行う。

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

$0 < r < +\infty, 0 < \theta < 2\pi$ となることに注意

さらに、 $s = \frac{1}{2}r^2$ と置換積分される。

このように、 $I^2 = 1$ が得られ、 $f(x) \geq 0$ なので、 $I = 1$ を得る。

4. 指数分布に従う X の確率密度関数 $f(x)$ について、

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ の証明：

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= [-e^{-\lambda x}]_0^{\infty} \\ &= 1 \end{aligned}$$

5. 一様分布に従う X の確率密度関数 $f(x)$ について、

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ の証明：

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_a^b \frac{1}{b-a} dx \\ &= \left[\frac{1}{b-a} x \right]_a^b \\ &= 1 \end{aligned}$$

6. X, Y は2変数正規分布に従うとき、 X の周辺確率密度関数は？

連続型確率変数 X, Y の結合確率密度関数は

$$\begin{aligned} h(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} \\ &= -\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}\left((y-\mu_2) - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1^2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2\right) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)\sigma_2^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}\right. \\ &\quad \left. \times \left((y-\mu_2) - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right)^2\right) dy \end{aligned}$$

積分の部分は、 $N\left(\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1), (1-\rho^2)\sigma_2^2\right)$ に対応し、積分値は1になる。

したがって、

$$\int \int h(x, y) dy dx = \int f(x) dx = 1$$

を得る。 $f(x)$ は、平均 μ_1 、分散 σ_1^2 の正規分布になっていることに注意せよ。

3 平均値, 分散

3.1 平均・分散の定義と公式

1 変数: 確率変数 X のある関数: $g(X)$

定義:

$g(X)$ の期待値 $E(g(X))$:

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum_i g(x_i)p_i = \sum_i g(x_i)f(x_i), & \text{離散型確率変数} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx, & \text{連続型確率変数} \end{cases}$$

1. 確率変数 X の平均 $E(X)$

$\Rightarrow X$ の期待値, $g(X) = X$

$$E(X) = \begin{cases} \sum_i x_i f(x_i), & \text{離散型確率変数} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, & \text{連続型確率変数} \end{cases} \\ = \mu, \quad (\text{または}, \mu_x)$$

2. 確率変数 X の分散 $V(X)$

$\Rightarrow (X - \mu)^2$ の期待値, $g(X) = (X - \mu)^2$

$$V(X) = E((X - \mu)^2) \\ = \begin{cases} \sum_i (x_i - \mu)^2 f(x_i), & \text{離散型確率変数} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx, & \text{連続型確率変数} \end{cases} \\ = \sigma^2, \quad (\text{または}, \sigma_x^2)$$

確率変数 X の分散 $V(X)$

$\Rightarrow X$ の確率分布の確率関数 (離散型の場合), または, 確率密度関数 (連続型の場合) の範囲が広ければ, $V(X)$ は大きい。

いくつかの公式:

1. a, b を定数とする。

定理: $E(aX + b) = aE(X) + b$

証明:

X が離散型確率変数の場合,

$$E(aX + b) = \sum_i (ax_i + b)f(x_i) \\ = a \sum_i x_i f(x_i) + b \sum_i f(x_i) \\ = aE(X) + b$$

途中で, $\sum_i f(x_i) = 1$ に注意

X が連続型確率変数の場合,

$$E(aX + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)f(x)dx \\ = a \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\ = aE(X) + b$$

途中で, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ に注意

2. 定理: $V(X) = E(X^2) - \mu^2$

証明:

$$V(X) = E((X - \mu)^2) \\ = E(X^2 - 2\mu X - \mu^2) \\ = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\ = E(X^2) - \mu^2$$

途中で, $\mu = E(X)$ に注意

3. a, b を定数とする。

定理: $V(aX + b) = a^2V(X)$

証明:

$E(aX + b) = a\mu + b$ に注意して,

$$V(aX + b) = E(((aX + b) - E(aX + b))^2) \\ = E((aX - a\mu)^2) \\ = E(a^2(X - \mu)^2) \\ = a^2E((X - \mu)^2) \\ = a^2V(X)$$

を得る。

4. 定理：確率変数 X について， $E(X) = \mu$ ， $V(X) = \sigma^2$ とする。

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \text{ を定義する。}$$

このとき， $E(Z) = 0$ ， $V(Z) = 1$ となる。

証明：

$$E(Z) = E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{E(X) - \mu}{\sigma} = 0$$

$$V(Z) = V\left(\frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}V(X) = 1$$

- 2 変数：確率変数 X, Y のある関数： $g(X, Y)$

定義：

$g(X, Y)$ の期待値 $E(g(X, Y))$ ：

$$E(g(X, Y)) = \begin{cases} \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) f(x_i, y_j), & \text{離散型確率変数} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy, & \text{連続型確率変数} \end{cases}$$

1. 確率変数 X の平均 $E(X)$

$\implies X$ の期待値， $g(X, Y) = X$

$$E(X) = \begin{cases} \sum_i \sum_j x_i f(x_i, y_j), & \text{離散型確率変数} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy, & \text{連続型確率変数} \end{cases} = \mu_x$$

2. 確率変数 X の分散 $V(X)$

$\implies (X - \mu_x)^2$ の期待値， $g(X, Y) = (X - \mu_x)^2$

$$V(X) = E((X - \mu_x)^2)$$

$$= \begin{cases} \sum_i \sum_j (x_i - \mu_x)^2 f(x_i, y_j), & \text{離散型確率変数} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f(x, y) dx dy, & \text{連続型確率変数} \end{cases} = \sigma_x^2$$

3. 確率変数 X, Y の共分散 $\text{Cov}(X, Y)$

$\implies (X - \mu_x)(Y - \mu_y)$ の期待値， $g(X, Y) = (X - \mu_x)(Y - \mu_y)$

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - \mu_x)(Y - \mu_y)) = \begin{cases} \sum_i \sum_j (x_i - \mu_x)(y_j - \mu_y) f(x_i, y_j), & \text{離散型確率変数} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x, y) dx dy, & \text{連続型確率変数} \end{cases}$$

いくつかの公式：

1. 確率変数 X, Y について，

定理： $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

証明：

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \sum_i \sum_j (x_i + y_j) f(x_i, y_j) \\ &= \sum_i \sum_j x_i f(x_i, y_j) \\ &\quad + \sum_i \sum_j y_j f(x_i, y_j) \\ &= E(X) + E(Y) \end{aligned}$$

2. 確率変数 X と Y が独立のとき，

定理： $E(XY) = E(X)E(Y)$

証明：

$$E(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j f(x_i, y_j)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i \sum_j x_i y_j f(x_i) h(y_j) \\
&= \sum_i x_i f(x_i) \sum_j y_j h(y_j) \\
&= E(X)E(Y)
\end{aligned}$$

3. 確率変数 X, Y について,

定理: $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

証明:

$$\begin{aligned}
&\text{Cov}(X, Y) \\
&= \sum_i \sum_j (x_i - \mu_x)(y_j - \mu_y) p_{ij} \\
&= \sum_i \sum_j (x_i y_j - \mu_x y_j - \mu_y x_i + \mu_x \mu_y) p_{ij} \\
&= \sum_i \sum_j x_i y_j f(x_i, y_j) \\
&\quad - \mu_x \sum_i \sum_j y_j f(x_i, y_j) \\
&\quad - \mu_y \sum_i \sum_j x_i f(x_i, y_j) \\
&\quad + \mu_x \mu_y \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) \\
&= \sum_i \sum_j x_i y_j f(x_i, y_j) - \mu_x \mu_y - \mu_y \mu_x + \mu_x \mu_y \\
&= \sum_i \sum_j x_i y_j f(x_i, y_j) - \mu_x \mu_y \\
&= E(XY) - E(X)E(Y)
\end{aligned}$$

より, 一般的な証明:

$$\begin{aligned}
&\text{Cov}(X, Y) \\
&= E((X - \mu_x)(Y - \mu_y)) \\
&= E(XY - \mu_x Y - \mu_y X + \mu_x \mu_y) \\
&= E(XY) - E(\mu_x Y) - E(\mu_y X) + \mu_x \mu_y \\
&= E(XY) - \mu_x E(Y) - \mu_y E(X) + \mu_x \mu_y \\
&= E(XY) - \mu_x \mu_y - \mu_y \mu_x + \mu_x \mu_y \\
&= E(XY) - \mu_x \mu_y \\
&= E(XY) - E(X)E(Y)
\end{aligned}$$

4. 確率変数 X と Y が独立のとき,

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

となるので,

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$

を得る。

5. 相関係数 ρ_{xy} :

$$\begin{aligned}
\rho_{xy} &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} \\
&= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}
\end{aligned}$$

6. 確率変数 X と Y が独立のとき,

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$

となるので,

$$\rho_{xy} = 0$$

を得る。

7. 確率変数 X, Y について,

$$V(X \pm Y) = V(X) \pm 2\text{Cov}(X, Y) + V(Y)$$

証明:

$$\begin{aligned}
&V(X \pm Y) \\
&= E\left(\left((X \pm Y) - E(X \pm Y)\right)^2\right) \\
&= E\left(\left((X - \mu_x) \pm (Y - \mu_y)\right)^2\right) \\
&= E\left((X - \mu_x)^2 \pm 2(X - \mu_x)(Y - \mu_y) + (Y - \mu_y)^2\right) \\
&= E((X - \mu_x)^2) \\
&\quad \pm 2E((X - \mu_x)(Y - \mu_y)) \\
&\quad + E((Y - \mu_y)^2) \\
&= V(X) \pm 2\text{Cov}(X, Y) + V(Y)
\end{aligned}$$

8. $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$

証明:

次のような t に関する式を考える。 $f(t) = V(Xt - Y)$ 分散なので, 必ずゼロ以上となる。よって, すべての t について, $f(t) \geq 0$ となるための条件を求めればよい。 t に関する 2 次方程式の判別式がゼロ以下となる条件

を求める。 $V(Xt - Y) = V(Xt) - 2\text{Cov}(Xt, Y) + V(Y)$
 $= t^2V(X) - 2t\text{Cov}(X, Y) + V(Y)$

$$\frac{D}{2} = (\text{Cov}(X, Y))^2 - V(X)V(Y) \leq 0$$

$$\frac{(\text{Cov}(X, Y))^2}{V(X)V(Y)} \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} \leq 1$$

$$-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$$

ρ_{xy} が 1 に近いほど、正の相関が強くなる。

ρ_{xy} が -1 に近いほど、負の相関が強くなる。

9. 確率変数 X と Y が独立のとき、

定理： $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

証明：

$$V(X + Y) = V(X) + 2\text{Cov}(X, Y) + V(Y)$$

確率変数 X と Y が独立のとき、

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$

なので、

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

を得る。

10. n 個の確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n について：

$E(X_i) = \mu_i$ とするとき、

$$E(\sum_i X_i) = \sum_i E(X_i) = \sum_i \mu_i$$

$$V(\sum_i X_i) \equiv E\left(\sum_i (X_i - \mu_i)\right)^2$$

$$= E\left(\sum_i (X_i - \mu_i)\right)\left(\sum_j (X_j - \mu_j)\right)$$

$$= E\left(\sum_i \sum_j (X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\right)$$

$$= \sum_i \sum_j E\left((X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\right)$$

$$= \sum_i \sum_j \text{Cov}(X_i, X_j)$$

11. n 個の確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n は互いに独立で同じ平均 μ 、分散 σ^2 を持つとする。すなわち、すべての $i = 1, 2, \dots, n$ について、

$$E(X_i) = \mu, \quad V(X_i) = \sigma^2$$

を仮定する。

さらに、算術平均 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ を考える。

このとき、

定理： $E(\bar{X}) = \mu, V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

が成り立つ。

証明：

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= E\left(\sum_i \frac{X_i}{n}\right) = \sum_i E\left(\frac{X_i}{n}\right) \\ &= \sum_i \frac{1}{n} E(X_i) = \sum_i \frac{1}{n} \mu \\ &= \mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(\bar{X}) &= V\left(\sum_i \frac{X_i}{n}\right) = \sum_i V\left(\frac{X_i}{n}\right) \\ &= \sum_i \frac{1}{n^2} V(X_i) = \sum_i \frac{1}{n^2} \sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

3.2 いくつかの分布の平均・分散

ベルヌイ分布の平均と分散： ベルヌイ分布：

$$f(x) = p^x(1-p)^{1-x} \quad x = 0, 1$$

$E(X) = p, V(X) = p(1-p)$

証明：

平均：

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x x f(x) \\ &= \sum_{x=0}^1 x p^x (1-p)^{1-x} \\ &= p \end{aligned}$$

分散：

$\mu = E(X)$ のとき、 $V(X) = E(X^2) - \mu^2$ により、 $E(X^2)$ を求める。

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_x x^2 f(x) \\ &= \sum_{x=0}^1 x^2 p^x (1-p)^{1-x} \\ &= p^2 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \mu^2 \\ &= p - p^2 \\ &= p(1 - p) \end{aligned}$$

2 項分布の平均と分散: 2 項分布:

$$\begin{aligned} f(x) &= {}_n C_x p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

$$E(X) = np, \quad V(X) = np(1-p)$$

証明:

平均:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x x f(x) \\ &= \sum_x x {}_n C_x p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_x x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_x \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= np \sum_x \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} (1-p)^{n-x} \\ &= np \sum_{x'} \frac{n!}{x'!(n'-x')!} p^{x'} (1-p)^{n'-x'} \\ &= np \sum_{x'} {}_{n'} C_{x'} p^{x'} (1-p)^{n'-x'} \\ &= np \end{aligned}$$

ただし, $n' = n - 1$, $x' = x - 1$ と定義される。

確率関数の性質より,

$$\sum_x {}_n C_x p^x (1-p)^{n-x} = 1$$

を得ることに注意。

分散:

$V(X) = E(X^2) - \mu^2$ により, $E(X^2)$ を求める。

$X^2 = X(X-1) + X$ を利用する。

$$E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X)$$

したがって,

$$V(X) = E(X(X-1)) + \mu - \mu^2 \text{ となる。}$$

右辺第 1 項を求める。

$$\begin{aligned} &E(X(X-1)) \\ &= \sum_x x(x-1) f(x) \\ &= \sum_x x(x-1) {}_n C_x p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_x x(x-1) \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_x \frac{n!}{(x-2)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_x \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^{x-2} (1-p)^{n-x} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{x'} \frac{n!}{x'!(n'-x')!} p^{x'} (1-p)^{n'-x'} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{x'} {}_{n'} C_{x'} p^{x'} (1-p)^{n'-x'} \\ &= n(n-1)p^2 \end{aligned}$$

途中で, $n' = n - 2$, $x' = x - 2$ と定義されている。

まとめると,

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \mu^2 \\ &= E(X(X-1)) + \mu - \mu^2 \\ &= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 \\ &= -np^2 + np \\ &= np(1-p) \end{aligned}$$

ポアソン分布の平均と分散: ポアソン分布:

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

$$E(X) = \lambda, \quad V(X) = \lambda$$

証明:

平均:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_k k f(k) \\ &= \sum_k k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_k \lambda e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda \sum_{k'} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k'}}{k'!} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

ただし, $k' = k - 1$ と定義される。

確率関数の性質より,

$$\sum_k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 1,$$

を得ることに注意。

分散:

$V(X) = E(X^2) - \mu^2$ により, $E(X^2)$ を求める。

$X^2 = X(X - 1) + X$ を利用する。

$$E(X^2) = E(X(X - 1)) + E(X)$$

したがって,

$$V(X) = E(X(X - 1)) + \mu - \mu^2 \text{ となる。}$$

右辺第 1 項を求める。

$$\begin{aligned} & E(X(X - 1)) \\ &= \sum_k k(k - 1)f(k) \\ &= \sum_k k(k - 1)e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_k \lambda^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \\ &= \lambda^2 \sum_{k'} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k'}}{k'!} \end{aligned}$$

途中で, $k' = k - 2$ と定義されている。

まとめると,

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \mu^2 \\ &= E(X(X - 1)) + \mu - \mu^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\ &= \lambda \end{aligned}$$

正規分布の平均と分散: 正規分布: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

$$E(X) = \mu, V(X) = \sigma^2$$

証明:

平均:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ((x - \mu) + \mu) f(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu) f(x) dx + \mu \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx + \mu \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[-\sigma^2 e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \right]_{-\infty}^{\infty} + \mu \\ &= \mu \end{aligned}$$

確率密度関数の性質から,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

となることに注意。

合成関数の微分:

$$y = h(g(x)) \implies y = h(u), u = g(x)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \\ &= h'(u) g'(x) \\ &= h(g(x)) g'(x) \end{aligned}$$

上の計算では,

$$h(u) = -\sigma^2 e^u, g(x) = -\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2$$

とすればよい。

ロピタルの定理:

ある関数 $g(x), f(x)$ について,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

ならば,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

となる。

例:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0 \\ \frac{de^x}{dx} &= e^x \text{ に注意。} \end{aligned}$$

分散:

$$V(X) = E(X - \mu)^2$$

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu) \frac{d\left(-\sigma^2 e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\right)}{dx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[(x - \mu) \left(-\sigma^2 e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\right) \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx \\ &= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

部分積分：

$$\int_a^b h(x)g'(x)dx = \left[h(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b h'(x)g(x)dx \text{ を利用。}$$

$$h(x) = x - \mu, g(x) = -\sigma^2 e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \text{ とする。}$$

指数分布の平均と分散： 指数分布：

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & 0 < x \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他のとき} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

証明：

平均：

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^{\infty} x \frac{d(-e^{-\lambda x})}{dx} dx \\ &= \left[x(-e^{-\lambda x}) \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

確率密度関数の性質から，

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= [-e^{-\lambda x}]_0^{\infty} \\ &= 1 \end{aligned}$$

に注意。

分散：

$V(X) = E(X^2) - \mu^2$ により， $E(X^2)$ を求める。

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^{\infty} x^2 \frac{d(-e^{-\lambda x})}{dx} dx \\ &= \left[x^2(-e^{-\lambda x}) \right]_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{2}{\lambda} E(X) \\ &= \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \mu^2 \\ &= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

一様分布の平均と分散： 一様分布：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他のとき} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{b-a}{2}, V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

証明：

平均：

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\ &= \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

分散：

$V(X) = E(X^2) - \mu^2$ により， $E(X^2)$ を求める。

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx \\ &= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b$$

$$= \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

$$V(X) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

カイ二乗分布の平均と分散： カイ二乗分布：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} 2^{-\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0 \text{ のとき} \\ 0, & x < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$E(X) = n, V(X) = 2n$$

証明：

平均：

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} x \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} 2^{-\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$= \frac{2^{-\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n+2}{2})}{2^{-\frac{n+2}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})}$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} 2^{-\frac{n+2}{2}} x^{\frac{n+2}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$= 2 \frac{n}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{n'}{2})} 2^{-\frac{n'}{2}} x^{\frac{n'}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$= n$$

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} u^{s-1} e^{-u} du \implies \text{ガンマ関数 } \Gamma(s+1) = s\Gamma(s),$$

$$\Gamma(1) = 1, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \text{ に注意}$$

また、 $n' = n + 2$ を使い、確率密度関数の性質から、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} 2^{-\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx = 1$$

に注意。

分散：

$V(X) = E(X^2) - \mu^2$ により、 $E(X^2)$ を求める。

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} 2^{-\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} 2^{-\frac{n}{2}} x^{\frac{n+4}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$= \frac{2^{-\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n+4}{2})}{2^{-\frac{n+4}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})}$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{n+4}{2})} 2^{-\frac{n+4}{2}} x^{\frac{n+4}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$= 4 \left(\frac{n+2}{2} \right) \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{n'}{2})} 2^{-\frac{n'}{2}} x^{\frac{n'}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$= n(n+2)$$

$n' = n + 4$ を使う。

$$V(X) = n(n+2) - n^2 = 2n$$

4 変数変換と和の分布 (連続型確率変数の場合のみ)

4.1 一変数の場合

$Y = \psi^{-1}(X)$ の分布： 連続型確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$

$X = \psi(Y)$ の一対一変換のとき、

Y の確率密度関数 $g(y)$ は、

$$g(y) = |\psi'(y)| f(\psi(y))$$

証明：

確率変数 X の分布関数を $F(x)$ 、確率密度関数を $f(x)$ とする。

(すなわち、 $F(x) = P(X \leq x)$ 、 $f(x) = F'(x)$ である。)

$Y = h(X)$ とする。

$X = \psi(Y)$ のとき、 Y の分布を求める。

すなわち、 $h^{-1}(Y) = \psi(Y)$ となる。

Y の分布関数を $G(y)$ 、確率密度関数を $g(y)$ とする。

$\psi'(X) > 0$ の場合：

$$G(y) = P(Y \leq y)$$

$$= P(h(X) \leq y)$$

$$= P(X \leq h^{-1}(y))$$

$$= P(X \leq \psi(y))$$

$$= F(\psi(y))$$

なので、

$$g(y) = G'(y)$$

$$= \psi'(y) F'(\psi(y))$$

$$= \psi'(y) f(\psi(y))$$

を得る。

$\psi'(X) < 0$ の場合：

$$\begin{aligned}
G(y) &= P(Y \leq y) \\
&= P(h(X) \leq y) \\
&= P(X \geq h^{-1}(y)) \\
&= P(X \geq \psi(y)) \\
&= 1 - P(X < \psi(y)) \\
&= 1 - F(\psi(y))
\end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned}
g(y) &= G'(y) \\
&= -\psi'(y)F'(\psi(y)) \\
&= -\psi'(y)f(\psi(y))
\end{aligned}$$

を得る。 $-\psi'(y) > 0$ に注意したがって，まとめると，

$$g(y) = |\psi'(y)|f(\psi(y))$$

を得る。⇒ 変数変換

例： X は次の一様分布に従う。

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

$\lambda > 0$ について， $X = e^{-\lambda Y}$ とするとき， Y の分布は？

$\psi'(y) = -\lambda e^{-\lambda y}$ なので，

$$\begin{aligned}
g(y) &= |\psi'(y)|f(\psi(y)) \\
&= \lambda e^{-\lambda y}
\end{aligned}$$

となる。 y のとりうる範囲は， $0 < x < 1$ により， $0 < e^{-\lambda y} < 1$ なので， $0 < y$ となる。したがって，

$$g(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & 0 < y \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

特殊ケース： $Y = X^2$ の分布について： 確率変数 X の分布関数を $F(x)$ ，確率密度関数を $f(x)$ とする。

確率変数 Y の分布関数を $G(y)$ ，確率密度関数を $g(y)$ とする。

$Y = X^2$ の分布関数 $G(y)$ は，

$$\begin{aligned}
G(y) &= P(Y \leq y) \\
&= P(X^2 \leq y) \\
&= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\
&= F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})
\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
g(y) &= G'(y) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{y}}(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y}))
\end{aligned}$$

例： $\chi^2(1)$ 分布： $X \sim N(0, 1)$ とするとき， $Y = X^2 \sim \chi^2(1)$ となる。

証明：

X の分布関数とその微分：

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du \\
f(x) &= F'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)
\end{aligned}$$

Y の確率密度関数 $g(y)$ は， $y > 0$ について，

$$\begin{aligned}
g(y) &= G'(y) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{y}}(F'(\sqrt{y}) + F'(-\sqrt{y})) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{y}} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})2^{\frac{1}{2}}} y^{\frac{1}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right)
\end{aligned}$$

これは $Y \sim \chi^2(1)$ を意味する。

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ に注意

$Y \sim \chi^2(n)$ のとき， Y の確率密度関数は，

$$f(y) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} \exp(-\frac{y}{2})$$

に注意

例： $N(0, 1)$ 分布： $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ とするとき， $Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ となる。

証明：

X の分布関数：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right)$$

$X = \psi(Y) = \sigma Y + \mu$ なので, Y の密度関数は,

$$\begin{aligned} g(y) &= |\psi'(y)|f(\psi(y)) \\ &= |\sigma| \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \end{aligned}$$

となる。これは, $N(0, 1)$ に一致する。

4.2 二変数の場合

$X = \psi_1(U, V), Y = \psi_2(U, V)$ のとき, (U, V) の分布: 確率変数 X, Y の結合密度関数 $f(x, y)$ について, $X = \psi_1(U, V), Y = \psi_2(U, V)$ のとき, 確率変数 U, V の結合密度関数 $g(u, v)$

$$g(u, v) = |J|f(\psi_1(u, v), \psi_2(u, v))$$

ただし, J はヤコビアンと呼ばれ,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

である (証明略)。

U の周辺密度関数 $h(u)$:

$$h(u) = \int g(u, v)dv$$

V の周辺密度関数 $p(v)$:

$$p(v) = \int g(u, v)du$$

例: 正規分布: X, Y は互いに独立な確率変数でそれぞれ正規分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$ に従うとき, $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ となる。

証明:

X, Y の確率密度関数

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x - \mu_1)^2\right) \\ g(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_2^2}(y - \mu_2)^2\right) \end{aligned}$$

X, Y の結合確率密度関数は, X, Y は互いに独立な確率変数なので,

$$\begin{aligned} h(x, y) &= f(x)g(y) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x - \mu_1)^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}(y - \mu_2)^2\right) \end{aligned}$$

$U = X + Y, V = Y$ として, U, V の結合確率密度関数を求める。 $X = U - V, Y = V$ なので,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

となるので, U, V の結合確率密度関数 $s(u, v)$ は, 変数変換により,

$$\begin{aligned} s(u, v) &= h(u - v, v)|J| \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(u - v - \mu_1)^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}(v - \mu_2)^2\right) \end{aligned}$$

U の周辺確率密度関数 $p(u)$ を求める。

$$\begin{aligned} p(u) &= \int s(u, v)dv \\ &= \int \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(u - v - \mu_1)^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}(v - \mu_2)^2\right)dv \\ &= \int \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}((v - \mu_2) - (u - \mu_1 - \mu_2))^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}(v - \mu_2)^2\right)dv \\ &= \int \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2/(1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2)}((v - \mu_2) - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}(u - \mu_1 - \mu_2))^2 - \frac{1}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}(u - \mu_1 - \mu_2)^2\right)dv \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi/(1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2)}} \times \exp\left(-\frac{1}{2/(1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2)}((v - \mu_2) - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}(u - \mu_1 - \mu_2))^2 - \frac{1}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}(u - \mu_1 - \mu_2)^2\right)dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}(u - \mu_1 - \mu_2)^2) \\
& \times \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}(u - \mu_1 - \mu_2)^2\right) dv \\
& = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi/(1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2)}} \\
& \times \exp\left(-\frac{1}{2/(1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2)}((v - \mu_2) \right. \\
& \quad \left. -\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}(u - \mu_1 - \mu_2))^2\right) dv \\
& \times \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}(u - \mu_1 - \mu_2)^2\right) \\
& = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}(u - \mu_1 - \mu_2)^2\right)
\end{aligned}$$

例： χ^2 分布： X, Y は互いに独立で， $X \sim \chi^2(n), Y \sim \chi^2(m)$ とするとき， $U = X + Y \sim \chi^2(n + m)$ となる。

証明：

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \exp(-\frac{x}{2}), \quad x > 0 \\
g(y) &= \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} y^{\frac{m}{2}-1} \exp(-\frac{y}{2}), \quad y > 0
\end{aligned}$$

X, Y の結合確率密度関数は， X, Y は互いに独立な確率変数なので，

$$\begin{aligned}
& h(x, y) \\
& = f(x)g(y) \\
& = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \exp(-\frac{x}{2}) \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} y^{\frac{m}{2}-1} \exp(-\frac{y}{2}) \\
& = C x^{\frac{n}{2}-1} y^{\frac{m}{2}-1} \exp(-\frac{x+y}{2})
\end{aligned}$$

ただし， $C = \frac{1}{2^{\frac{n+m}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}$ とする。

$U = X + Y, V = Y$ として，変数変換を行う。

$X = U - V, Y = V$ なので，

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

となるので， U, V の結合確率密度関数 $s(u, v)$ は，変数変換により，

$$s(u, v)$$

$$\begin{aligned}
& = h(u - v, v)|J| \\
& = C(u - v)^{\frac{n}{2}-1} v^{\frac{m}{2}-1} \exp(-\frac{u}{2})
\end{aligned}$$

U の周辺確率密度関数は，

$$\begin{aligned}
& p(u) \\
& = \int s(u, v) dv \\
& = C \exp(-\frac{u}{2}) \int_0^\infty (u - v)^{\frac{n}{2}-1} v^{\frac{m}{2}-1} dv \\
& = C \exp(-\frac{u}{2}) \int_0^\infty (u - uw)^{\frac{n}{2}-1} (uw)^{\frac{m}{2}-1} u dw \\
& = C u^{\frac{n+m}{2}-1} \exp(-\frac{u}{2}) \int_0^\infty (1 - w)^{\frac{n}{2}-1} w^{\frac{m}{2}-1} dw \\
& = CB\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right) u^{\frac{n+m}{2}-1} \exp(-\frac{u}{2}) \\
& = \frac{1}{2^{\frac{n+m}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{n+m}{2})} u^{\frac{n+m}{2}-1} \exp(-\frac{u}{2}) \\
& = \frac{1}{2^{\frac{n+m}{2}}\Gamma(\frac{n+m}{2})} u^{\frac{n+m}{2}-1} \exp(-\frac{u}{2})
\end{aligned}$$

$w = \frac{v}{u}$ ，すなわち， $v = uw$ として置換積分 ($\frac{dv}{du} = u$ に注意)

ベータ関数 $B(n, m)$ は

$$\begin{aligned}
B(n, m) &= \int_0^\infty (1 - x)^{n-1} x^{m-1} dx \\
&= \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}
\end{aligned}$$

に注意

例： t 分布： X, Y は互いに独立で， $X \sim N(0, 1), Y \sim \chi^2(n)$ とするとき， $U = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$ となる。

U の密度関数 $f(u)$ は，

$$f(u) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

となる。

証明：

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}x^2), \quad -\infty < x < \infty \\
g(y) &= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} \exp(-\frac{y}{2}), \quad y > 0
\end{aligned}$$

X, Y の結合確率密度関数は, X, Y は互いに独立な確率変数なので,

$$\begin{aligned} h(x, y) &= f(x)g(y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{y}{2} - \frac{1}{2}x^2\right) \end{aligned}$$

$U = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}, V = Y$ として, 変数変換を行う。

$X = U\sqrt{\frac{V}{n}}, Y = V$ なので,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{v}{n}} & \frac{u}{2\sqrt{nv}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{v}{n}}$$

となるので, U, V の結合確率密度関数 $s(u, v)$ は, 変数変換により,

$$\begin{aligned} s(u, v) &= h\left(u\sqrt{\frac{v}{n}}, v\right)|J| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{u^2v}{n}\right) \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} v^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{v}{2}\right) \sqrt{\frac{v}{n}} \\ &= Cv^{\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\frac{v}{2}\left(1 + \frac{u^2}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

ただし, $C = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{\sqrt{n}}$ とする。

U の周辺確率密度関数は,

$$\begin{aligned} p(u) &= \int s(u, v)dv \\ &= C \int v^{\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\frac{v}{2}\left(1 + \frac{u^2}{n}\right)\right) dv \\ &= C \int \left(w\left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}w\right) \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-1} dw \\ &= C \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \int w^{\frac{n+1}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}w\right) dw \\ &= C \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} 2^{\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \int \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})} w^{\frac{n+1}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}w\right) dw \\ &= C \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} 2^{\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{\sqrt{n}} 2^{\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \end{aligned}$$

$w = v\left(1 + \frac{u^2}{n}\right)$ として置換積分。

$f(w) = \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})} w^{\frac{n+1}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}w\right)$ は $\chi^2(n+1)$ の密度関数に注意。

例: Cauchy 分布: X, Y は互いに独立で, $X \sim N(0, 1), Y \sim N(0, 1)$ とするとき, $U = \frac{X}{Y}$ は Cauchy 分布となる。 U の密度関数 $f(u)$ は,

$$f(u) = \frac{1}{\pi(1+u^2)}$$

となる。

証明:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right), \quad -\infty < x < \infty \\ g(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right), \quad -\infty < y < \infty \end{aligned}$$

X, Y の結合確率密度関数は, X, Y は互いに独立な確率変数なので,

$$\begin{aligned} h(x, y) &= f(x)g(y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) \end{aligned}$$

$u = \frac{x}{y}, v = y$ として, 変数変換を行う。

$x = uv, y = v$ なので,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = v$$

となるので, U, V の結合確率密度関数 $s(u, v)$ は, 変数変換により,

$$\begin{aligned} s(u, v) &= h(uv, v)|J| \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}v^2(1+u^2)\right)|v| \end{aligned}$$

U の周辺確率密度関数は,

$$\begin{aligned} p(u) &= \int s(u, v)dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |v| \exp\left(-\frac{1}{2}v^2(1+u^2)\right)dv \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} v \exp\left(-\frac{1}{2}v^2(1+u^2)\right)dv \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{1+u^2} \exp\left(-\frac{1}{2}v^2(1+u^2)\right) \right]_{v=0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{\pi(1+u^2)} \end{aligned}$$

5 積率と積率母関数

5.1 積率母関数 (1 変数)

確率変数 X について,

積率: $\mu'_n = E(X^n) \implies$ 原点のまわりの n 次の積率

積率母関数: $\phi(\theta) = E(e^{\theta X})$

$$\begin{aligned} \phi(\theta) &= E(e^{\theta X}) \\ &= \begin{cases} \sum e^{\theta a_i} f(a_i), & \text{離散型} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f(x) dx, & \text{連続型} \end{cases} \end{aligned}$$

性質:

1. $\phi^{(n)}(0) = \mu'_n \equiv E(X^n)$

証明:

$\phi(\theta)$ を $\theta = 0$ のまわりで, テーラー展開を行う。

$$\begin{aligned} \phi(\theta) &= E\left(1 + \frac{X}{1!}\theta + \frac{X^2}{2!}\theta^2 + \dots + \frac{X^n}{n!}\theta^n + \dots\right) \\ &= 1 + \frac{E(X)}{1!}\theta + \frac{E(X^2)}{2!}\theta^2 + \dots + \frac{E(X^n)}{n!}\theta^n + \dots \\ &= 1 + \frac{\mu'_1}{1!}\theta + \frac{\mu'_2}{2!}\theta^2 + \dots + \frac{\mu'_n}{n!}\theta^n + \dots \end{aligned}$$

したがって,

$$\phi^{(n)}(\theta) = \mu'_n + \frac{\mu'_{n+1}}{1!}\theta + \frac{\mu'_{n+2}}{2!}\theta^2 + \dots$$

より, $\phi^{(n)}(0) = \mu'_n \equiv E(X^n)$

注)

関数 $f(x)$ の $x = x_0$ の回りでテーラー展開

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

ただし, $f^{(k)}(x_0)$ は $f(x)$ の k 回微分を $x = x_0$ で評価したものとする。

2. 確率変数 X の積率母関数と確率変数 Y の積率母関数は一致するとき, 確率変数 X の分布関数と確率変数 Y の分布関数も一致する。
3. 互いに独立な確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n の積率母関数を $\phi_1(\theta), \phi_2(\theta), \dots, \phi_n(\theta)$ とするとき, $X_1+X_2+\dots+X_n$ の積率母関数は $\phi_1(\theta)\phi_2(\theta)\dots\phi_n(\theta)$ となる。

証明:

$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ として, Y の積率母関数 $\phi_y(\theta)$ は

$$\begin{aligned} \phi_y(\theta) &= E(e^{\theta Y}) \\ &= E(e^{\theta(X_1+X_2+\dots+X_n)}) \\ &= E(e^{\theta X_1})E(e^{\theta X_2})\dots E(e^{\theta X_n}) \\ &= \phi_1(\theta)\phi_2(\theta)\dots\phi_n(\theta) \end{aligned}$$

4. 互いに独立な確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n が同一の分布に従い, その積率母関数を $\phi(\theta)$ とするとき, $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ の積率母関数は $(\phi(\theta))^n$ となる。

ベルヌイ分布の積率母関数: $\phi(\theta) = pe^{\theta} + (1-p)$

ベルヌイ分布

$$f(x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$$

積率母関数

$$\begin{aligned} \phi(\theta) &= \sum_{x=0}^1 e^{\theta x} f(x) \\ &= \sum_{x=0}^1 e^{\theta x} p^x (1-p)^{1-x} \\ &= e^{\theta} p + 1 - p \end{aligned}$$

1. 平均 :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \phi'(0) \\
\phi(\theta) &= e^\theta p + 1 - p, \\
\phi'(\theta) &= pe^\theta \text{ なので,} \\
E(X) &= \phi'(0) \\
&= p
\end{aligned}$$

2. 分散 :

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \text{ なので, } E(X^2) \text{ を求める.} \\
E(X^2) &= \phi''(0) \\
\phi''(\theta) &= pe^\theta \text{ なので,} \\
V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
&= \phi''(0) - (\phi'(0))^2 \\
&= p - p^2 \\
&= p(1 - p)
\end{aligned}$$

二項分布の積率母関数 : $\phi(\theta) = (pe^\theta + (1 - p))^n$
二項分布

$$f(x) = {}_n C_x p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n$$

積率母関数

$$\begin{aligned}
\phi(\theta) &= \sum_{x=0}^n e^{\theta x} f(x) \\
&= \sum_{x=0}^n e^{\theta x} {}_n C_x p^x (1 - p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^n {}_n C_x (e^\theta p)^x (1 - p)^{n-x} \\
&= (e^\theta p + 1 - p)^n
\end{aligned}$$

(二項定理より)

1. 平均 :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \phi'(0) \\
\phi(\theta) &= (e^\theta p + 1 - p)^n, \\
\phi'(\theta) &= npe^\theta (e^\theta p + 1 - p)^{n-1} \text{ なので,} \\
E(X) &= \phi'(0) \\
&= np
\end{aligned}$$

2. 分散 :

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \text{ なので, } E(X^2) \text{ を求める.} \\
E(X^2) &= \phi''(0) \\
\phi''(\theta) &= npe^\theta (e^\theta p + 1 - p)^{n-1} + n(n-1)p^2 e^{2\theta} (e^\theta p + 1 - p)^{n-2} \text{ なので,} \\
V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
&= \phi''(0) - (\phi'(0))^2 \\
&= np + n(n-1)p^2 - (np)^2 \\
&= np(1 - p)
\end{aligned}$$

ポアソン分布の積率母関数 : $\phi(\theta) = \exp(\lambda(e^\theta - 1))$
ポアソン分布

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \dots$$

積率母関数

$$\begin{aligned}
\phi(\theta) &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{\theta x} f(x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} e^{\theta x} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(e^\theta \lambda)^x}{x!} \\
&= \exp(-\lambda) \exp(e^\theta \lambda) \\
&= \exp(\lambda(e^\theta - 1))
\end{aligned}$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^\lambda \text{ に注意}$$

1. 平均 :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \phi'(0) \\
\phi(\theta) &= \exp(\lambda(e^\theta - 1)), \\
\phi'(\theta) &= \lambda e^\theta \exp(\lambda(e^\theta - 1)) \text{ なので,}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X) &= \phi'(0) \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

2. 分散 :

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \text{ なので, } E(X^2) \text{ を求める.} \\
E(X^2) &= \phi''(0)
\end{aligned}$$

$\phi''(\theta) = (1 + \lambda e^\theta) \lambda e^\theta \exp(\lambda(e^\theta - 1))$ なので,

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \phi''(0) - (\phi'(0))^2 \\ &= (1 + \lambda)\lambda - \lambda^2 \\ &= \lambda \end{aligned}$$

正規分布の積率母関数: $\phi(\theta) = \exp\left(\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\right)$
正規分布

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

積率母関数

$$\begin{aligned} \phi(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2 + \theta x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2(\mu + \sigma^2\theta)x + \mu^2)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - (\mu + \sigma^2\theta))^2 + (\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)} dx \\ &= e^{\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - (\mu + \sigma^2\theta))^2} dx \\ &= \exp\left(\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\right) \end{aligned}$$

積分のところは, $N(\mu + \sigma^2\theta, \sigma^2)$ の確率密度関数に注意

1. 平均:

$$\begin{aligned} E(X) &= \phi'(0) \\ \phi(\theta) &= \exp\left(\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\right), \\ \phi'(\theta) &= (\mu + \sigma^2\theta) \exp\left(\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\right) \text{ なので,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \phi'(0) \\ &= \mu \end{aligned}$$

2. 分散:

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \text{ なので, } E(X^2) \text{ を求める.} \\ E(X^2) &= \phi''(0) \end{aligned}$$

$\phi''(\theta) = \sigma^2 \exp\left(\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\right) + (\mu + \sigma^2\theta)^2 \exp\left(\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\right)$ なので,

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \phi''(0) - (\phi'(0))^2 \\ &= (\sigma^2 + \mu^2) - \mu^2 \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

一様分布の積率母関数: $\phi(\theta) = \frac{e^{b\theta} - e^{a\theta}}{\theta(b-a)}$
一様分布

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b$$

積率母関数

$$\begin{aligned} \phi(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f(x) dx \\ &= \int_a^b e^{\theta x} \frac{1}{b-a} dx \\ &= \left[\frac{e^{\theta x}}{\theta(b-a)} \right]_a^b \\ &= \frac{e^{\theta b} - e^{\theta a}}{\theta(b-a)} \end{aligned}$$

1. 平均:

$$\begin{aligned} E(X) &= \phi'(0) \\ \phi(\theta) &= \frac{e^{\theta b} - e^{\theta a}}{\theta(b-a)}, \\ \phi'(\theta) &= \frac{be^{\theta b} - ae^{\theta a}}{\theta(b-a)} - \frac{e^{\theta b} - e^{\theta a}}{\theta^2(b-a)} \text{ なので,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \phi'(0) \leftarrow \text{ロピタルの定理を利用} \\ &= (a+b) - \frac{a+b}{2} \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

(*) ロピタルの定理

ある連続関数 $f(x)$ と $g(x)$ について,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

または,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

となる。これは,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \text{ or } \frac{0}{0},$$

または,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \text{ or } \frac{0}{0},$$

となるときに利用する。

2. 分散:

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ なので, $E(X^2)$ を求める。

$$E(X^2) = \phi''(0)$$

$$\phi''(\theta) = \frac{b^2 e^{\theta b} - a^2 e^{\theta a}}{\theta(b-a)} - 2 \frac{b e^{\theta b} - a e^{\theta a}}{\theta^2(b-a)} + 2 \frac{e^{\theta b} - e^{\theta a}}{\theta^3(b-a)}$$

なので,

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \phi''(0) - (\phi'(0))^2 \leftarrow \text{ロピタルの定理} \\ &= \left((b^2 + ab + a^2) - 2 \frac{b^2 + ab + a^2}{2} \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{b^2 + ab + a^2}{6} \right) - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \\ &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

指数分布の積率母関数: $\phi(\theta) = \frac{\lambda}{\lambda - \theta}$

指数分布

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad 0 < x$$

積率母関数

$$\begin{aligned} \phi(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{\theta x} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - \theta} \int_0^{\infty} (\lambda - \theta) e^{-(\lambda - \theta)x} dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - \theta} \end{aligned}$$

積分のところは, パラメータ $\lambda - \theta$ の指数分布に注意

1. 平均:

$$E(X) = \phi'(0)$$

$$\phi(\theta) = \frac{\lambda}{\lambda - \theta},$$

$$\phi'(\theta) = \frac{\lambda}{(\lambda - \theta)^2} \text{ なので,}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \phi'(0) \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

2. 分散:

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ なので, $E(X^2)$ を求める。

$$E(X^2) = \phi''(0)$$

$$\phi''(\theta) = 2 \frac{\lambda}{(\lambda - \theta)^3} \text{ なので,}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \phi''(0) - (\phi'(0))^2 \\ &= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

χ^2 分布の積率母関数: $\phi(\theta) = \left(\frac{1}{1 - 2\theta} \right)^{\frac{n}{2}}$

$\chi^2(n)$ 分布

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right), \quad 0 < x$$

積率母関数

$$\begin{aligned} \phi(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{\theta x} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}(1 - 2\theta)x\right) dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{y}{1 - 2\theta}\right)^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right) \frac{1}{1 - 2\theta} dy \\ &= \left(\frac{1}{1 - 2\theta}\right)^{\frac{n}{2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right) dy \\ &= \left(\frac{1}{1 - 2\theta}\right)^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

$y = (1 - 2\theta)x$ として置換積分 $\left(\frac{dx}{dy} = (1 - 2\theta)^{-1}\right)$

積分のところは, 自由度 n の $\chi^2(n)$ 分布に注意

1. 平均 :

$$E(X) = \phi'(0)$$

$$\phi(\theta) = (1 - 2\theta)^{-\frac{n}{2}},$$

$$\phi'(\theta) = \left(-\frac{n}{2}\right)(-2)(1 - 2\theta)^{-\frac{n}{2}-1} \text{ なので,}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \phi'(0) \\ &= n \end{aligned}$$

2. 分散 :

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ なので, $E(X^2)$ を求める。

$$E(X^2) = \phi''(0)$$

$$\phi''(\theta) = \left(-\frac{n}{2}\right)\left(-\frac{n}{2} - 1\right)(-2)^2(1 - 2\theta)^{-\frac{n}{2}-1} \text{ なので,}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \phi''(0) - (\phi'(0))^2 \\ &= n(n+2) - n^2 \\ &= 2n \end{aligned}$$

例題 : ベルヌイ分布の和の分布 : X_1, X_2, \dots, X_n はそれぞれ独立に同一のベルヌイ分布に従うものとする。このとき, $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ は二項分布 $b(y; n, p)$ に従う。

証明 :

$P(X_i = 1) = p$ のとき, X_i の積率母関数 $\phi_i(\theta)$ は,

$$\phi_i(\theta) = pe^\theta + 1 - p$$

Y の積率母関数 $\phi_y(\theta)$ は,

$$\begin{aligned} \phi_y(\theta) &= E(e^{\theta Y}) \\ &= E(e^{\theta(X_1+X_2+\dots+X_n)}) \\ &= E(e^{\theta X_1})E(e^{\theta X_2})\dots E(e^{\theta X_n}) \\ &= \phi_1(\theta)\phi_2(\theta)\dots\phi_n(\theta) \\ &= (\phi(\theta))^n \\ &= (pe^\theta + 1 - p)^n \end{aligned}$$

これは, 二項分布 $b(y; n, p)$ の積率母関数に一致する。

注)

3 つ目の等式は, X_1, X_2, \dots, X_n はそれぞれ独立であるため。

5 つ目の等式は, X_1, X_2, \dots, X_n は同一の分布に従うため。

例題 : 正規分布の和の分布 : X, Y はたがいに独立な確率変数で, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ とする。このとき, 定数 a, b について, $aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$ となる。

証明 :

X, Y の積率母関数 $\phi_x(\theta), \phi_y(\theta)$ は,

$$\phi_x(\theta) = \exp\left(\mu_1\theta + \frac{1}{2}\sigma_1^2\theta^2\right)$$

$$\phi_y(\theta) = \exp\left(\mu_2\theta + \frac{1}{2}\sigma_2^2\theta^2\right)$$

$W = aX + bY$ の積率母関数 $\phi_w(\theta)$ は,

$$\begin{aligned} \phi_w(\theta) &= E(e^{\theta W}) \\ &= E(e^{\theta(aX+bY)}) \\ &= E(e^{a\theta X})E(e^{b\theta Y}) \\ &= \phi_x(a\theta)\phi_y(b\theta) \\ &= \exp\left(\mu_1(a\theta) + \frac{1}{2}\sigma_1^2(a\theta)^2\right) \\ &\quad \times \exp\left(\mu_2(b\theta) + \frac{1}{2}\sigma_2^2(b\theta)^2\right) \\ &= \exp\left((a\mu_1 + b\mu_2)\theta + \frac{1}{2}(a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)\theta^2\right) \end{aligned}$$

これは, 平均 $a\mu_1 + b\mu_2$, 分散 $a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2$ の正規分布の積率母関数に一致する。

よって, $aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$ となる。

例題 : χ^2 分布の和の分布 X, Y は互いに独立で, $X \sim \chi^2(n), Y \sim \chi^2(m)$ とするとき, $Z = X + Y \sim \chi^2(n+m)$ となる。

証明 :

X, Y の積率母関数 $\phi_x(\theta), \phi_y(\theta)$ とする。このとき, $\phi_x(\theta), \phi_y(\theta)$ はそれぞれ,

$$\phi_x(\theta) = \left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^{\frac{n}{2}},$$

$$\phi_y(\theta) = \left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^{\frac{m}{2}},$$

となる。 $Z = X + Y$ の積率母関数 $\phi_z(t)$ は, X, Y は互いに独立な確率変数なので,

$$\begin{aligned} \phi_z(\theta) &\equiv E(e^{\theta Z}) \\ &= E(e^{\theta(X+Y)}) \\ &= E(e^{\theta X})E(e^{\theta Y}) \\ &= \phi_x(\theta)\phi_y(\theta) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^{\frac{m}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^{\frac{n+m}{2}}$$

これは、自由度 $n+m$ の χ^2 分布の積率母関数に等しい。
したがって、 $Z \sim \chi^2(n+m)$ となる。

ただし、3 つ目の等号が成り立つ理由は、 X と Y は独立な確率変数であるためである。

5.2 積率母関数 (多変数)

確率変数 X, Y について、

積率母関数： $\phi(\theta_1, \theta_2) = E(e^{\theta_1 X + \theta_2 Y})$

性質：

1. 多変数の積率

$$\frac{\partial^{j+k} \phi(0, 0)}{\partial \theta_1^j \partial \theta_2^k} = E(X^j Y^k)$$

2. (X_1, Y_1) の積率母関数と (X_2, Y_2) の積率母関数が一致すれば、 (X_1, Y_1) の分布関数と (X_2, Y_2) の分布関数も一致する。

3. (X, Y) の積率母関数 $\phi(\theta_1, \theta_2)$,

X の積率母関数 $\phi_1(\theta_1)$,

Y の積率母関数 $\phi_2(\theta_2)$ について、

$$\phi_1(\theta_1) = \phi(\theta_1, 0), \quad \phi_2(\theta_2) = \phi(0, \theta_2)$$

4. (X, Y) の積率母関数 $\phi(\theta_1, \theta_2)$,

X の積率母関数 $\phi_1(\theta_1)$,

Y の積率母関数 $\phi_2(\theta_2)$ について、

X と Y が独立であるための条件は、

$$\phi(\theta_1, \theta_2) = \phi_1(\theta_1)\phi_2(\theta_2)$$

確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n について、

積率母関数： $\phi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = E(e^{\theta_1 X_1 + \theta_2 X_2 + \dots + \theta_n X_n})$

2 変数正規分布の積率母関数： (X, Y) の確率密度関数

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{vmatrix}^{-1}$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} |\Sigma|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}' \Sigma^{-1} \mathbf{x}\right)$$

積率母関数

$$\phi(\theta_1, \theta_2) = E(e^{\theta_1 X + \theta_2 Y})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta_1 x + \theta_2 y} f(x, y) dx dy$$

$$= \iint e^{\theta_1(x-\mu_1) + \theta_2(y-\mu_2) + \theta_1\mu_1 + \theta_2\mu_2} f(x, y) dx dy$$

$$= \iint \exp\left(\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}\right) \times f(x, y) dx dy$$

$$= \int \exp(\theta' \mathbf{x} + \theta' \boldsymbol{\mu}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$= \int \frac{1}{2\pi} |\Sigma|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}' \Sigma^{-1} \mathbf{x} + \theta' \mathbf{x} + \theta' \boldsymbol{\mu}\right) d\mathbf{x}$$

$$= \int \frac{1}{2\pi} |\Sigma|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\theta})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\theta}) + \theta' \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} \theta' \Sigma \boldsymbol{\theta}\right) d\mathbf{x}$$

$$= \exp(\theta' \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} \theta' \Sigma \boldsymbol{\theta})$$

$$\times \int \frac{1}{2\pi} |\Sigma|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\theta})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\theta})\right) d\mathbf{x}$$

$$= \exp(\theta' \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} \theta' \Sigma \boldsymbol{\theta})$$

$$= \exp\left(\mu_1 \theta_1 + \mu_2 \theta_2 + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 \theta_1^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho \theta_1 \theta_2 + \sigma_2^2 \theta_2^2)\right)$$

ただし、

$$f(\mathbf{x}) = f(x, y),$$

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x - \mu_1 \\ y - \mu_2 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

$$= \left[ax - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^a \\ = \frac{1}{2}a^2 \\ = 1$$

とする。

$$1. E(X) = \left. \frac{\partial \phi(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \right|_{(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)}$$

$$2. E(Y) = \left. \frac{\partial \phi(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} \right|_{(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)}$$

$$3. E(X^2) = \left. \frac{\partial^2 \phi(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1^2} \right|_{(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$4. E(Y^2) = \left. \frac{\partial^2 \phi(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2^2} \right|_{(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

$$5. E(XY) = \left. \frac{\partial^2 \phi(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right|_{(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

練習問題と解答 (1 章 ~ 5 章)

1 連続型確率変数 X の密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} a - x, & 0 < x < a \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

であるとき、次の問に答えよ。

- (1) a を求めよ。
- (2) X の平均と分散を求めよ。
- (3) $Y = X^2$ とするとき、 Y の密度関数を求めよ。

[解答]

(1) 密度関数の性質 $\int f(x)dx = 1$ から、

$$\int f(x)dx = \int_0^a (a - x)dx$$

により、 $a = \sqrt{2}$ を得る。($a > 0$ なので)

(2) 平均、分散の定義は、 $E(X) = \int xf(x)dx$, $V(X) = \int (x - \mu)^2 f(x)dx$ (ただし、 $\mu = E(X)$ とする) である。よって、

$$E(X) = \int xf(x)dx \\ = \int_0^a x(a - x)dx \\ = \left[\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^a \\ = \frac{1}{6}a^3 \\ = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \leftarrow a = \sqrt{2} \text{ を代入する}$$

$$V(X) = \int (x - \mu)^2 f(x)dx \\ = \int x^2 f(x)dx - \mu^2 \\ = \int_0^a x^2(a - x)dx - \mu^2 \\ = \left[\frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^a - \mu^2 \\ = \frac{1}{12}a^4 - \mu^2 \\ = \frac{1}{3} - \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^2 \\ = \frac{1}{9}$$

(3) X の密度関数を $f(x)$ 、分布関数を $F(x)$ とする。また、 Y の密度関数を $g(y)$ とし、分布関数を $G(y)$ とする。 $Y = X^2$ なので、

$$G(y) \\ = P(Y < y) \\ = P(X^2 < y)$$

$$\begin{aligned}
&= P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) \\
&= F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) \\
&= F(\sqrt{y}) \quad \leftarrow \quad F(-\sqrt{y}) = 0
\end{aligned}$$

を得る。さらに、密度関数と分布関数の関係から、

$$\begin{aligned}
g(y) &= \frac{dG(y)}{dy} \\
&= \frac{dF(\sqrt{y})}{dy} \\
&= \frac{dF(x)}{dx} \frac{d\sqrt{y}}{dy} \quad \leftarrow \quad x = \sqrt{y} \\
&= F'(x) \frac{1}{2\sqrt{y}} \\
&= f(x) \frac{1}{2\sqrt{y}} \\
&= f(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} \\
&= (\sqrt{2} - \sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad 0 < y < 2 \text{ のとき}
\end{aligned}$$

y の範囲は、

$$0 < x < \sqrt{2} \implies 0 < x^2 < 2 \implies 0 < y < 2$$

となる。

2 連続型確率変数 X の密度関数が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

であるとき、次の問に答えよ。

- (1) X の平均と分散を求めよ。
- (2) $Y = X^2$ とするとき、 Y の平均と分散を求めよ。
- (3) $Z = e^X$ とするとき、 Z の平均と分散を求めよ。

[解答]

- (1) 平均、分散の定義は、 $E(X) = \int xf(x)dx$, $V(X) = \int (x - \mu)^2 f(x)dx$ (ただし、 $\mu = E(X)$ とする) である。よって、

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int xf(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{1}{2}x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} \\
&= 0
\end{aligned}$$

3 つ目の等式は、 $\frac{de^{-\frac{1}{2}x^2}}{dx} = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ を利用する。

$$\begin{aligned}
V(X) &= \int (x - \mu)^2 f(x)dx \\
&= \int x^2 f(x)dx - \mu^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx - \mu^2 \\
&= \left[-x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx - \mu^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

4 つ目の等式では、部分積分を利用

$$\begin{aligned}
&\int_a^b h'(x)g(x)dx \\
&= [h(x)g(x)]_a^b - \int_a^b h(x)g'(x)dx
\end{aligned}$$

$g(x) = x$, $h'(x) = x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ とおく。

また、4 つ目の等式の第 1 項では、

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$$

を利用する。

4 つ目の等式の第 2 項では、密度関数の積分が 1 になることを利用。

- (2) $Y = X^2$ とするとき、 Y の平均と分散を求めよ。

$$\begin{aligned}
E(Y) &= E(X^2) \\
&= V(X) + \mu_x^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

- (1) より、 $V(X) = 1$, $\mu_x = E(X) = 0$ に注意。

$$\begin{aligned}
V(Y) &= E(Y - \mu_y)^2 \quad \leftarrow \quad \mu_y = E(Y) = 1 \\
&= E(Y^2) - \mu_y^2 \\
&= E(X^4) - \mu_y^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx - \mu_y^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \cdot x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx - \mu_y^2 \\
&= \left[-x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} \\
&+ 3 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx - \mu_y^2 \\
&= 3E(X^2) - \mu_y^2 \quad \leftarrow \quad E(X^2) = 1, \mu_y = 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

6つ目の等式では，部分積分を利用

$$\begin{aligned}
&\int_a^b h'(x)g(x)dx \\
&= [h(x)g(x)]_a^b - \int_a^b h(x)g'(x)dx
\end{aligned}$$

$g(x) = x^3, h'(x) = x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ とおく。

また，6つ目の等式の第1項では，

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$$

を利用する。

(3) $Z = e^X$ とするとき， Z の平均と分散を求める。

$$\begin{aligned}
E(Z) &= E(e^X) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2x)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}} dx \\
&= e^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2} dx \\
&= e^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

6つ目の等式は， $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$ が，平均 1，分散 1 の正規分布となり，その積分値は 1 となることによる。

$$\begin{aligned}
V(Z) &= E(Z - \mu_z)^2 \quad \leftarrow \quad \mu_z = E(Z) = e^{\frac{1}{2}} \\
&= E(Z^2) - \mu_z^2 \\
&= E(e^{2X}) - \mu_z^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx - \mu_z^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2-4x)} dx - \mu_z^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2} dx - \mu_z^2 \\
&= e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2} dx - \mu_z^2 \\
&= e^2 - e
\end{aligned}$$

8つ目の等式は， $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2}$ が，平均 2，分散 1 の正規分布となり，その積分値は 1 となることによる。

3 連続型確率変数 X の密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, & 0 < x \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

であるとき，次の問に答えよ。

- (1) X の平均と分散を求めよ。
- (2) X の積率母関数を求めよ。
- (3) X_1, X_2, \dots, X_n を互いに独立で上に示された分布に従うものとする。 $\lambda = 2$ のとき， $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ の密度関数は，自由度 $2n$ のカイ二乗分布となることを示せ。ただし，自由度 n のカイ二乗分布とは 5 の確率変数 X の密度関数である。

[解答]

- (1) X の平均と分散を求める。

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int x f(x) dx \\
&= \int_0^{\infty} x \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx \\
&= [-\lambda e^{-\frac{x}{\lambda}}]_0^{\infty} \\
&+ \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx \\
&= [-\lambda e^{-\frac{x}{\lambda}}]_0^{\infty} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

3つ目の等式では，部分積分を利用

$$\begin{aligned}
&\int_a^b h'(x)g(x)dx \\
&= [h(x)g(x)]_a^b - \int_a^b h(x)g'(x)dx
\end{aligned}$$

$$g(x) = x, h'(x) = \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}} \text{ とおく。}$$

また,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-\frac{x}{\lambda}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{x}{\lambda}} = 0$$

を利用

$$\begin{aligned} V(X) &= \int (x - \mu)^2 f(x) dx \\ &= \int x^2 f(x) dx - \mu^2 \quad \leftarrow \mu = E(X) = \lambda \\ &= \int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx - \mu^2 \\ &= [-x^2 e^{-\frac{x}{\lambda}}]_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x}{\lambda}} dx - \mu^2 \\ &= [-x^2 e^{-\frac{x}{\lambda}}]_0^{\infty} + 2\lambda \int_0^{\infty} x \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx - \mu^2 \\ &= 2\lambda E(X) - \mu^2 \quad \leftarrow \mu = E(X) = \lambda \\ &= 2\lambda^2 - \lambda^2 \\ &= \lambda^2 \end{aligned}$$

3つ目の等式では, 部分積分を利用

$$\begin{aligned} &\int_a^b h'(x)g(x)dx \\ &= [h(x)g(x)]_a^b - \int_a^b h(x)g'(x)dx \end{aligned}$$

$$g(x) = x^2, h'(x) = \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}} \text{ とおく。}$$

6つ目の等式では,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-\frac{x}{\lambda}} = 0$$

$$\mu = E(X) = \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x}{\lambda}} dx$$

を利用。

(2) X の積率母関数を求める。

$$\begin{aligned} \phi(\theta) &= E(e^{\theta X}) \\ &= \int e^{\theta x} f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{\theta x} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-(\frac{1}{\lambda} - \theta)x} dx \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\lambda} - \theta} \int_0^{\infty} (\frac{1}{\lambda} - \theta) e^{-(\frac{1}{\lambda} - \theta)x} dx \\ &= \frac{1}{1 - \lambda\theta} \end{aligned}$$

最後の等式では, $(\frac{1}{\lambda} - \theta)e^{-(\frac{1}{\lambda} - \theta)x}$ は密度関数であるので, その積分値は1であることによる。 $f(x)$ の λ を $\frac{1}{\lambda} - \theta$ で置き換えたものとなっている。

(3) Y の積率母関数と自由度 $2n$ のカイ二乗分布の積率母関数が一致することを示す。

X_1, X_2, \dots, X_n を互いに独立で上に示された分布に従うので, X_i の積率母関数 $\phi_i(\theta)$ は, (2) より, $\lambda = 2$ のとき,

$$\phi_i(\theta) = \frac{1}{1 - 2\theta} = \phi(\theta)$$

となる。

$\lambda = 2$ のとき, $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ の積率母関数 $\phi_y(\theta)$ は,

$$\begin{aligned} \phi_y(\theta) &= E(e^{\theta Y}) \\ &= E(e^{\theta(X_1 + X_2 + \dots + X_n)}) \\ &= E(e^{\theta X_1})E(e^{\theta X_2}) \dots E(e^{\theta X_n}) \\ &= \phi_1(\theta)\phi_2(\theta) \dots \phi_n(\theta) \\ &= (\phi(\theta))^n \\ &= \left(\frac{1}{1 - 2\theta}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{1 - 2\theta}\right)^{\frac{2n}{2}} \end{aligned}$$

したがって, Y の積率母関数は,

$$\phi_y(\theta) = \left(\frac{1}{1 - 2\theta}\right)^{\frac{2n}{2}}$$

となる。

一方、自由度 m のカイ二乗分布は、

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad x > 0 \text{ のとき}$$

なので、その積率母関数 $\phi_{\chi^2}(\theta)$ は、

$$\begin{aligned} \phi_{\chi^2}(\theta) &= E(e^{\theta X}) \\ &= \int_0^{\infty} e^{\theta x} \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(1-2\theta)x} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2})} \left(\frac{y}{1-2\theta}\right)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} \frac{1}{1-2\theta} dy \\ &= \left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^{\frac{m}{2}-1} \frac{1}{1-2\theta} \\ &\times \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2})} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} dy \\ &= \left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^{\frac{m}{2}} \end{aligned}$$

4つ目の等式で、 $y = (1-2\theta)x$ として、置換積分を利用。

$\frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2})} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y}$ は、自由度 m の χ^2 分布となっているので、その積分値は1となる。

$\phi_y(\theta)$ は、 $\phi_{\chi^2}(\theta)$ で、 $m = 2n$ に対応する。

すなわち、 $\phi_y(\theta)$ は自由度 $2n$ の χ^2 分布の積率母関数となっている。

したがって、 $Y \sim \chi^2(2n)$ となる。

4 連続型確率変数 X の密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

であるとき、次の問に答えよ。

- (1) X の平均と分散を求めよ。
- (2) $Y = -2 \log X$ とするとき、 Y の積率母関数を求めよ。ただし、 \log は自然対数とする。 $(y = -2 \log x$ は $x = e^{-\frac{1}{2}y}$ を意味する)

- (3) Y_1 と Y_2 を (2) で求められた密度関数に従う確率変数であるとする。しかも、 Y_1 と Y_2 は独立であるとする。 $Z = Y_1 + Y_2$ としたとき、 Z の密度関数を求めよ。

[解答]

- (1) X の平均と分散を求める。

$$\begin{aligned} E(X) &= \int x f(x) dx \\ &= \int_0^1 x dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= \int (x - \mu)^2 f(x) dx \\ &= \int x^2 f(x) dx - \mu^2 \quad \leftarrow \mu = E(X) = \frac{1}{2} \\ &= \int_0^1 x^2 dx - \mu^2 \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 - \mu^2 \\ &= \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

- (2) $Y = -2 \log X$ とするとき、 Y の積率母関数 $\phi_y(\theta)$ を求める。

$$\begin{aligned} \phi_y(\theta) &= E(e^{\theta Y}) \\ &= E(e^{-2\theta \log X}) \\ &= E(X^{-2\theta}) \\ &= \int x^{-2\theta} f(x) dx \\ &= \int_0^1 x^{-2\theta} dx \\ &= \left[\frac{1}{1-2\theta} x^{1-2\theta} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{1-2\theta} \end{aligned}$$

(3) Y_1 と Y_2 を (2) で求められた密度関数に従う確率変数であるとする。しかも、 Y_1 と Y_2 は独立であるとする。 $Z = Y_1 + Y_2$ としたとき、 Z の密度関数を求める。

Z の積率母関数 $\phi_z(\theta)$ を求める。

$$\begin{aligned}\phi_z(\theta) &= E(e^{\theta Z}) \\ &= E(e^{\theta(Y_1+Y_2)}) \\ &= E(e^{\theta Y_1})E(e^{\theta Y_2}) \\ &= (\phi_y(\theta))^2 \\ &= \left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^4\end{aligned}$$

これは、自由度 4 のカイ自乗分布の積率母関数に一致する。

よって、 $Z \sim \chi^2(4)$ となる。

ただし、自由度 n のカイ自乗分布の密度関数は、

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

として表され、その積率母関数 $\phi(\theta)$ は、

$$\phi(\theta) = \left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^{\frac{n}{2}}$$

となることに注意。

5 連続型確率変数 X の密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

であるとき、次の問に答えよ。ただし、 $\Gamma(a)$ はガンマ関数であり、

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x} dx$$

と定義される。

(1) X の平均と分散を求めよ。

(2) X の積率母関数を求めよ。

[解答]

(1) X の平均と分散を求める。

平均について：

$$\begin{aligned}E(X) &= \int_{-\infty}^\infty xf(x)dx \\ &= \int_0^\infty x \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} 2^{-\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx \\ &= \frac{2^{-\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n+2}{2})}{2^{-\frac{n+2}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \\ &\quad \times \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} 2^{-\frac{n+2}{2}} x^{\frac{n+2}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx \\ &= 2 \frac{n}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\frac{n'}{2})} 2^{-\frac{n'}{2}} x^{\frac{n'}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx \\ &= n\end{aligned}$$

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty u^{s-1}e^{-u} du \implies \text{ガンマ関数 } \Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \Gamma(1) = 1, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \text{ に注意}$$

また、 $n' = n + 2$ を使い、確率密度関数の性質から、

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} 2^{-\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx = 1$$

に注意。

分散について：

$V(X) = E(X^2) - \mu^2$ により、 $E(X^2)$ を求める。

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \int_{-\infty}^\infty x^2 f(x) dx \\ &= \int_0^\infty x^2 \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} 2^{-\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} 2^{-\frac{n}{2}} x^{\frac{n+4}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx \\ &= \frac{2^{-\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n+4}{2})}{2^{-\frac{n+4}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \\ &\quad \times \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\frac{n+4}{2})} 2^{-\frac{n+4}{2}} x^{\frac{n+4}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx \\ &= 4 \left(\frac{n+2}{2}\right) \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\frac{n'}{2})} 2^{-\frac{n'}{2}} x^{\frac{n'}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx \\ &= n(n+2)\end{aligned}$$

$n' = n + 4$ を使う。

$$V(X) = n(n+2) - n^2 = 2n$$

(2) X の積率母関数を求める。

$$\begin{aligned}
 \phi(\theta) &= E(e^{\theta X}) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f(x) dx \\
 &= \int_0^{\infty} e^{\theta x} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \exp(-\frac{x}{2}) dx \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}(1-2\theta)x\right) dx \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{y}{1-2\theta}\right)^{\frac{n}{2}-1} \exp(-\frac{1}{2}y) \frac{1}{1-2\theta} dy \\
 &= \left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^{\frac{n}{2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} \exp(-\frac{1}{2}y) dy \\
 &= \left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^{\frac{n}{2}}
 \end{aligned}$$

$y = (1-2\theta)x$ として置換積分 ($\frac{dx}{dy} = (1-2\theta)^{-1}$)

積分のところは、自由度 n の $\chi^2(n)$ 分布に注意

6 連続型確率変数 X, Y は互いに独立で、 $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(0, 1)$ とする。 $U = \frac{X}{Y}$ とするとき、次の間に答えよ。ただし、 $X \sim N(0, 1)$ のとき、 X の密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

と書き表される。

- (1) U の密度関数を求めよ。
 (2) U の 1 次の積率は存在しないということを証明せよ。

[解答]

- (1) U の密度関数を求める。

X, Y の密度関数は、それぞれ、

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}x^2), \quad -\infty < x < \infty \\
 g(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}y^2), \quad -\infty < y < \infty
 \end{aligned}$$

となる。

X, Y の結合確率密度関数は、 X, Y は互いに独立な確率変数なので、

$$\begin{aligned}
 h(x, y) &= f(x)g(y) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}x^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}y^2) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2))
 \end{aligned}$$

$u = \frac{x}{y}, v = y$ として、変数変換を行う。

$x = uv, y = v$ なので、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので、 U, V の結合確率密度関数 $s(u, v)$ は、変数変換により、

$$\begin{aligned}
 s(u, v) &= h(uv, v) \begin{vmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{1}{2}v^2(1+u^2)) |v|
 \end{aligned}$$

U の周辺確率密度関数は、

$$\begin{aligned}
 p(u) &= \int s(u, v) dv \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |v| \exp(-\frac{1}{2}v^2(1+u^2)) dv \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} v \exp(-\frac{1}{2}v^2(1+u^2)) dv \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{1+u^2} \exp(-\frac{1}{2}v^2(1+u^2)) \right]_{v=0}^{\infty} \\
 &= \frac{1}{\pi(1+u^2)}
 \end{aligned}$$

これは、コーシー分布の密度関数である。

- (2) U の 1 次の積率 (すなわち、平均) は存在しないということを証明する。

$$\begin{aligned}
 E(U) &= \int u f(u) du
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{1}{\pi(1+u^2)} du \\
&= \int_1^{\infty} \frac{1}{2\pi x} dx \quad \leftarrow x = 1+u^2 \text{ で置換積分} \\
&= \left[\frac{1}{2\pi} \log x \right]_1^{\infty} \quad \leftarrow \frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

$-\infty < u < \infty$ のとき, $x = 1+u^2$ の範囲は, $1 < x < \infty$ となる。

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}yx^2 \right]_0^1 dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}y \right) dy \\
&= \left[\frac{1}{3}y + \frac{1}{4}y^2 \right]_0^1 \\
&= \frac{7}{12}
\end{aligned}$$

$f(x, y)$ の形は, x と y を入れ替えても同じ形なので,

$$E(Y) = E(X) = \frac{7}{12}$$

となる。

$$\begin{aligned}
V(X) &= E\left((X - \mu)^2\right) \quad \leftarrow \mu = E(X) = \frac{7}{12} \\
&= E(X^2) - \mu^2 \\
&= \int_0^1 \int_0^1 x^2 f(x, y) dx dy - \mu^2 \\
&= \int_0^1 \int_0^1 x^2(x+y) dx dy - \mu^2 \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}yx^3 \right]_0^1 dy - \mu^2 \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}y \right) dy - \mu^2 \\
&= \left[\frac{1}{4}y + \frac{1}{6}y^2 \right]_0^1 - \mu^2 \\
&= \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12} \right)^2 \\
&= \frac{11}{144}
\end{aligned}$$

同様に,

$$V(Y) = V(X) = \frac{11}{144}$$

となる。

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(X, Y) &= E\left((X - \mu_x)(Y - \mu_y)\right) \\
&= E(XY) - \mu_x \mu_y \\
&= \frac{1}{3} - \frac{7}{12} \frac{7}{12} \\
&= -\frac{1}{144}
\end{aligned}$$

7 連続型確率変数 X, Y の同時密度関数が

$$f(x, y) = \begin{cases} x+y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

であるとき, 次の問に答えよ。

- (1) XY の期待値を求めよ。
- (2) X と Y の相関係数を求めよ。
- (3) X の周辺密度関数を求めよ。

[解答]

- (1) XY の期待値を求める。

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \int_0^1 \int_0^1 xyf(x, y) dx dy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y) dx dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}yx^3 + \frac{1}{2}y^2x^2 \right]_0^1 dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{3}y + \frac{1}{2}y^2 \right) dy \\
&= \left[\frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{6}y^3 \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

- (2) X と Y の相関係数 $\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$ を求める。

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^1 \int_0^1 xf(x, y) dx dy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 x(x+y) dx dy
\end{aligned}$$

ただし,

$$\mu_x = E(X) = \frac{7}{12}, \quad \mu_y = E(Y) = \frac{7}{12}$$

よって,

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \\ &= \frac{-\frac{1}{144}}{\sqrt{\frac{11}{144} \frac{11}{144}}} = -\frac{1}{11} \end{aligned}$$

(3) X の周辺密度関数 $f_x(x)$ を求める。

$$\begin{aligned} f_x(x) &= \int f(x, y) dy \\ &= \int_0^1 (x + y) dy \\ &= \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=0}^1 \\ &= x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

8 離散型確率変数 X の密度関数が

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots,$$

であるとき, 次の問に答えよ。

- (1) $\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1$ となることを証明せよ。
- (2) X の積率母関数を求めよ。
- (3) 積率母関数をもとにして, X の平均と分散を求めよ。

[解答]

(1) $\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1$ となることを証明する。

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\infty} f(x) &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ に注意。}$$

なぜなら, $f(x) = e^x$ としたとき, $f^{(k)}(x) = e^x$ となる。

テーラー展開の公式は,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

なので, $x_0 = 0$ として, $x = 0$ の回りでテーラー展開すると,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

を得る。

x を λ , k を x で置き換える。

(2) X の積率母関数を求める。

$$\begin{aligned} \phi(\theta) &= E(e^{\theta X}) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{\theta x} f(x) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{\theta x} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(e^{\theta} \lambda)^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda} \exp(e^{\theta} \lambda) \sum_{x=0}^{\infty} \exp(-e^{\theta} \lambda) \frac{(e^{\theta} \lambda)^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda} \exp(e^{\theta} \lambda) \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda'} \frac{\lambda'^x}{x!} \\ &= \exp(-\lambda) \exp(e^{\theta} \lambda) \\ &= \exp(\lambda(e^{\theta} - 1)) \end{aligned}$$

ただし, $\lambda' = e^{\theta} \lambda$ に注意

(3) 積率母関数をもとにして, X の平均と分散を求める。

平均について:

$$E(X) = \phi'(0)$$

$$\phi(\theta) = \exp(\lambda(e^\theta - 1)),$$

$$\phi'(\theta) = \lambda e^\theta \exp(\lambda(e^\theta - 1)) \text{ なので,}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \phi'(0) \\ &= \lambda \end{aligned}$$

分散について:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \text{ なので, } E(X^2) \text{ を求める。}$$

$$E(X^2) = \phi''(0)$$

$$\phi''(\theta) = (1 + \lambda e^\theta) \lambda e^\theta \exp(\lambda(e^\theta - 1)) \text{ なので,}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \phi''(0) - (\phi'(0))^2 \\ &= (1 + \lambda)\lambda - \lambda^2 \\ &= \lambda \end{aligned}$$

6 大数の法則と中心極限定理

6.1 Chebyshev の不等式

$g(x) \geq 0$ について,

$$P(g(X) \geq k) \leq \frac{E(g(X))}{k}$$

となる。ただし, k は正の定数とする。

証明:

$g(X) \geq k$ のとき $U = 1$, $g(X) < k$ のとき $U = 0$ となる
離散型確率変数 U を導入する。

離散型確率変数 U は 0 か 1 の値を取り, その確率関数 $f(u)$
は次のように与えられる。

$$f(u) = P(U = u)$$

ただし,

$$P(U = 1) = P(g(X) \geq k)$$

$$P(U = 0) = P(g(X) < k)$$

となる。

このとき, 常に, 以下の式が成り立つ。

$$g(X) \geq kU$$

よって, 両辺に期待値を取ると,

$$E(g(X)) \geq kE(U)$$

となる。 $E(U)$ を求める。

$$\begin{aligned} E(U) &= \sum_{u=0}^1 uP(U = u) \\ &= 1 \times P(U = 1) + 0 \times P(U = 0) \\ &= 1 \times P(g(X) \geq k) + 0 \times P(g(X) < k) \\ &= P(g(X) \geq k) \end{aligned}$$

したがって,

$$E(g(X)) \geq kP(g(X) \geq k)$$

から,

$$P(g(X) \geq k) \leq \frac{E(g(X))}{k}$$

を得る。

代表的な例： $E(X) = \mu, V(X) = \sigma^2, \lambda > 1$ を任意の定数とする。このとき，

$$P(|X - \mu| \geq \lambda\sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

$$P(|X - \mu| < \lambda\sigma) \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2}$$

となる。

証明：

$g(X) = (X - \mu)^2, k = \lambda^2\sigma^2$ とすると，

$$P(g(X) \geq k) \leq \frac{E(g(X))}{k}$$

から，

$$P((X - \mu)^2 \geq \lambda^2\sigma^2) \leq \frac{\sigma^2}{\lambda^2\sigma^2}$$

$$P(|X - \mu| \geq \lambda\sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

を得る。

さらに， $\epsilon = \lambda\sigma$ とすると，

$$P(|X - \mu| > \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

とも書き表される。

6.2 大数の (弱) 法則 (Convergence in probability)

X_1, X_2, \dots, X_n が互いに独立な確率変数ですべて同じ分布に従うとし，すべての i について $E(X_i) = \mu$ とする。このとき任意の正数 ϵ について， $n \rightarrow \infty$ のとき，

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon) \rightarrow 0$$

が成り立つ。ただし，

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

とする。

このとき， \bar{X}_n は μ に確率収束するという。

証明：

$E(\bar{X}_n) = \mu, V(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$ なので，

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

が成り立つ。したがって， $n \rightarrow \infty$ のとき，

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \rightarrow 0$$

となる。すなわち， $\bar{X}_n \rightarrow \mu$ が得られる。

系：また， X_1, X_2, \dots, X_n が同じ分布に従わなくても，独立性もなくても，

$$m_n = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right),$$

$$V_n = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right),$$

が存在し， $n \rightarrow \infty$ のとき，

$$\frac{V_n}{n^2} \rightarrow 0$$

が成り立てば，

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - m_n}{n} \rightarrow 0$$

が成り立つ。(証明略)

2 つとも，大数の (弱) 法則と呼ばれる。

6.3 中心極限定理

X_1, X_2, \dots, X_n が互いに独立な確率変数ですべて同じ分布に従うとし，すべての i について $E(X_i) = \mu, V(X_i) = \sigma^2$ とする。以上の仮定のもとで， $n \rightarrow \infty$ のとき，

$$P\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < x\right) \rightarrow \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

が成り立つ。⇒ 中心極限定理

証明：

$Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ と Y_i を定義する。

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i$$

一方， $E(Y_i) = 0, V(Y_i) = 1$ を利用して， Y_i の積率母関数は，

$$\phi(\theta) \equiv E(e^{Y_i\theta})$$

$$= E\left(1 + Y_i\theta + \frac{1}{2}Y_i^2\theta^2 + \frac{1}{3!}Y_i^3\theta^3 \dots\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\theta^2 + O(\theta^3)$$

となる。($\theta = 0$ の回りで, $e^{Y_i\theta}$ をテーラー展開する。)

$Z = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i$ の積率母関数 $\Phi(\theta)$ は,

$$\begin{aligned} \Phi(\theta) &= E(e^{Z\theta}) \\ &= E\left(e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i}\right) \\ &= \prod_{i=1}^n E\left(e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}} Y_i}\right) \\ &= \prod_{i=1}^n \phi_i\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \left(\phi\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\theta^2}{n} + O\left(\frac{\theta^3}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\theta^2}{n} + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)\right)^n \end{aligned}$$

注)

Y_1, Y_2, \dots, Y_n はそれぞれ独立で, 同じ分布関数を持つので, 積率母関数は同じになる。すなわち,

$$\phi_1(\theta) = \phi_2(\theta) = \dots = \phi_n(\theta) = \phi(\theta)$$

となる。

さらに, $x = \frac{1}{2} \frac{\theta^2}{n} + O(n^{-\frac{3}{2}})$ とおき, $\frac{n}{x}$ を両辺に掛けて, $n = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} \theta^2 + O(n^{-\frac{1}{2}})\right)$ を代入する。

$$\begin{aligned} \Phi(\theta) &= \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\theta^2}{n} + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)\right)^n \\ &= (1+x)^{\frac{1}{x}(\frac{\theta^2}{2} + O(n^{-\frac{1}{2}}))} \\ &= \left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{\theta^2}{2} + O(n^{-\frac{1}{2}})} \longrightarrow e^{\frac{\theta^2}{2}} \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき, $x \rightarrow 0$ となる。

注)

e の定義について,

$$\begin{aligned} e &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{h \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h \\ &= 2.71828182845905 \end{aligned}$$

に注意。

$e^{\frac{\theta^2}{2}}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ の積率母関数であるので,

$$P\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < x\right) \longrightarrow \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

が成り立つ。

系: X_1, X_2, \dots, X_n が同じ分布に従わなくても, 独立性もなくても, $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - E(\sum_{i=1}^n X_i)}{\sqrt{V(\sum_{i=1}^n X_i)}} < x\right) \\ \longrightarrow \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \end{aligned}$$

が成り立つ。(証明略)

7 大数の強法則 (Almost sure convergence)

大数の強法則 (その 1): X_1, X_2, \dots, X_n が互いに独立な確率変数ですべて同じ分布に従うとし, すべての i について $E(X_i) = \mu$ とする。このとき,

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \mu\right) = 1$$

ただし, $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ とする。

大数の強法則 (その 2): X_1, X_2, \dots, X_n が互いに独立な確率変数で, 平均と分散が存在するものとする (同一の分布に従わなくてもよい)。 $V(X_i) = \sigma_i^2$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_n$, $m_n = E(S_n)$ とする。 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma_i^2}{i^2} < \infty$ のとき,

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - m_n}{n} = 0\right) = 1$$

が成り立つ。

8 統計的推定

8.1 推定法と標本平均および標本分散の性質

8.1.1 推定法

点推定: 母集団の分布型は既知, その分布のある特性値 θ (母数) は未知とする。

その母集団の分布は $f(x; \theta)$ で与えられている。

このとき, 標本の実現値 (x_1, x_2, \dots, x_n) から適当な値 $\hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を計算する。

$\hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を θ の推定値とする。 \implies 点推定例：

母平均 μ の点推定値 (= 標本平均 \bar{x})

$$\hat{\mu}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

母分散 σ^2 の点推定値 (= 標本不偏分散 s^2)

$$\hat{\sigma}_n^2(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

区間推定： 母集団の分布の未知母数 θ を推定するとき、実現値 (x_1, x_2, \dots, x_n) より $\hat{\theta}_L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ と $\hat{\theta}_U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を作り、区間 $(\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U)$ の中に θ は $1 - \alpha$ の確率で入っていることを示す推定法を区間推定法という。

区間 $(\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U)$ は信頼係数 $1 - \alpha$ の θ の信頼区間である。

$\hat{\theta}_L \implies$ 信頼下限

$\hat{\theta}_U \implies$ 信頼上限

信頼区間の幅はなるべく狭くなるように $\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U$ を選ぶ。

8.1.2 標本, 統計量, 推定量

母集団の分布型は既知, その分布のある特性値 θ (母数) は未知とする。

その母集団の分布は $f(x; \theta)$ で与えられている。

標本: $X_1, X_2, \dots, X_n \implies$ 母集団の部分集合

実現値: x_1, x_2, \dots, x_n

母数 θ の推定量: $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$

母数 θ の推定値: $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$

例: $\theta = (\mu, \sigma^2)$ とする。

μ の推定量: $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

μ の推定値: $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

σ^2 の推定量: $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

σ^2 の推定値: $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

注)

確率変数の関数 \implies 統計量

母数の推定のために使われる統計量 \implies 推定量

8.1.3 母平均, 母分散の推定

X_1, X_2, \dots, X_n は互いに独立で, すべて同一の分布 (すなわち, 平均 μ , 分散 σ^2 ですべて同一の分布) に従うものとする。

1. 母平均 μ の推定量:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

2. 母分散 σ^2 の推定量:

- 母平均 μ が既知のとき: $S^{*2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$

- 母平均 μ が未知のとき: $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

\bar{X} の性質:

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu \\ &= \frac{1}{n} n\mu \\ &= \mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(\bar{X}) &= V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 \\ &= \frac{1}{n^2} n\sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

必要な公式：

$$E(aX) = aE(X)$$

$$V(aX) = a^2V(X)$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) \iff X \text{ と } Y \text{ は独立のとき}$$

S^{*2} , S^2 の性質：

$$\begin{aligned} E(S^{*2}) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2\right) \\ &= \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\left((X_i - \mu)^2\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V(X_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma^2 \\ &= \frac{1}{n} n\sigma^2 \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(S^2) &= E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) \\ &= \frac{1}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) \\ &= \frac{1}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^n ((X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu))^2\right) \\ &= \frac{1}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^n ((X_i - \mu)^2 - 2(X_i - \mu)(\bar{X} - \mu) + (\bar{X} - \mu)^2)\right) \\ &= \frac{1}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu) \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) + n(\bar{X} - \mu)^2\right) \\ &= \frac{1}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - 2n(\bar{X} - \mu)^2 + n(\bar{X} - \mu)^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2\right) \\ &= \frac{1}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2\right) - \frac{1}{n-1} E\left(n(\bar{X} - \mu)^2\right) \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n E\left((X_i - \mu)^2\right) - \frac{n}{n-1} E\left((\bar{X} - \mu)^2\right) \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n V(X_i) - \frac{n}{n-1} V(\bar{X}) \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \sigma^2 - \frac{n}{n-1} \frac{\sigma^2}{n} \\ &= \frac{1}{n-1} n\sigma^2 - \frac{1}{n-1} \sigma^2 \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

必要な公式：

$$E(X_i - \mu)^2 = V(X_i) = \sigma^2$$

$$E(\bar{X} - \mu)^2 = V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \mu) = n(\bar{X} - \mu)$$

したがって, $S^{**2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ とすると,

$$\begin{aligned} E(S^{**2}) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) \\ &= E\left(\frac{n-1}{n} \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) \\ &= E\left(\frac{n-1}{n} S^2\right) \\ &= \frac{n-1}{n} E(S^2) \\ &= \frac{n-1}{n} \sigma^2 \end{aligned}$$

8.2 点推定法：最適性

母数： θ

推定値： $\hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$

推定量: $\hat{\theta}_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$

$\hat{\theta}_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$ を $\hat{\theta}_n$ と書く。

$\hat{\theta}_n$ の望ましい性質: 不偏性, 有効性, 十分性, 一致性

⇒ 最適性

⇒ 最適推定量

不偏性: $E(\hat{\theta}_n) = \theta$

⇒ θ を中心にして $\hat{\theta}_n$ は分布している。

$\hat{\theta}_n$ は θ の不偏推定量であるという。

$E(\hat{\theta}_n) - \theta$ をバイアス (bias) と呼ぶ。

X_1, X_2, \dots, X_n は互いに独立で, すべて同一の分布 (すなわち, 平均 μ , 分散 σ^2 ですべて同一の分布) に従うものとする。

1. 母平均 μ の推定量:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

2. 母分散 σ^2 の推定量:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$E(\bar{X}) = \mu, E(S^2) = \sigma^2$ なので, \bar{X}, S^2 は μ, σ^2 の不偏推定量である。

有効性: 2つの不偏推定量 $\hat{\theta}_n, \tilde{\theta}_n$ を考える。

すなわち, $E(\hat{\theta}_n) = \theta, E(\tilde{\theta}_n) = \theta$

$V(\hat{\theta}_n) < V(\tilde{\theta}_n)$ のとき, $\hat{\theta}_n$ が $\tilde{\theta}_n$ より有効であるという。

⇒ バラツキの小さい推定量の方が望まれる。

クラメル・ラオの不等式 (Cramer-Rao Inequality): 任意の不偏推定量 $\hat{\theta}_n$ について,

$$V(\hat{\theta}_n) \geq \frac{\sigma^2}{n}$$

が成り立つ。ただし,

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sigma^2(\theta) \\ &= \frac{1}{E\left[\left(\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]} \\ &= -\frac{1}{E\left(\frac{\partial^2 \log f(X; \theta)}{\partial \theta^2}\right)} \end{aligned}$$

とする。

等号が成り立つ $\hat{\theta}_n$ が存在するとき, $\hat{\theta}_n$ は最小分散の不偏推定量である。

⇒ 有効推定量

クラメル・ラオの不等式の証明:

まず, 準備として, 尤度関数 $l(\theta; x) = l(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n)$ は (X_1, X_2, \dots, X_n) の結合密度関数なので, その積分値は 1 となる。

尤度関数については, 後述。

すなわち,

$$1 = \int l(\theta; x) dx$$

を得る。

ただし, $l(\theta; x) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$ とする。

$\int \dots dx$ は n 重積分を意味するものとする。

両辺を θ で微分して整理する。

$$\begin{aligned} 0 &= \int \frac{\partial l(\theta; x)}{\partial \theta} dx \\ &= \int \frac{1}{l(\theta; x)} \frac{\partial l(\theta; x)}{\partial \theta} l(\theta; x) dx \\ &= \int \frac{\partial \log l(\theta; x)}{\partial \theta} l(\theta; x) dx \\ &= E\left[\frac{\partial \log l(\theta; X)}{\partial \theta}\right] \end{aligned}$$

これは $\frac{\partial \log l(\theta; X)}{\partial \theta}$ の期待値はゼロを意味する。

3行目では, $\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x}$ に注意。

今, θ の推定量を $\hat{\theta}_n$ とおく。

$$E(\hat{\theta}_n) = \int \hat{\theta}_n l(\theta; x) dx$$

θ について微分

$$\begin{aligned} &\frac{\partial E(\hat{\theta}_n)}{\partial \theta} \\ &= \int \hat{\theta}_n \frac{\partial l(\theta; x)}{\partial \theta} dx \\ &= \int \hat{\theta}_n \frac{\partial \log l(\theta; x)}{\partial \theta} l(\theta; x) dx \\ &= \int (\hat{\theta}_n - E(\hat{\theta}_n)) \left(\frac{\partial \log l(\theta; x)}{\partial \theta} - E\left(\frac{\partial \log l(\theta; x)}{\partial \theta}\right) \right) \end{aligned}$$

$$= \text{Cov} \left(\hat{\theta}_n, \frac{\partial \log l(\theta; X)}{\partial \theta} \right) \times l(\theta; x) dx$$

簡単化のために, $\hat{\theta}_n, \theta$ をスカラーとする。

このとき,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \text{E}(\hat{\theta}_n)}{\partial \theta} \right)^2 \\ &= \left[\text{Cov} \left(\hat{\theta}_n, \frac{\partial \log l(\theta; X)}{\partial \theta} \right) \right]^2 \\ &= \rho^2 \text{V}(\hat{\theta}_n) \text{V} \left(\frac{\partial \log l(\theta; X)}{\partial \theta} \right) \\ &\leq \text{V}(\hat{\theta}_n) \text{V} \left(\frac{\partial \log l(\theta; X)}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

ただし, ρ は $\hat{\theta}_n$ と $\frac{\partial \log l(\theta; X)}{\partial \theta}$ との相関係数とする。すなわち, $-1 \leq \rho \leq 1$ で, その定義は,

$$\rho = \frac{\text{Cov} \left(\hat{\theta}_n, \frac{\partial \log l(\theta; X)}{\partial \theta} \right)}{\sqrt{\text{V}(\hat{\theta}_n)} \sqrt{\text{V} \left(\frac{\partial \log l(\theta; X)}{\partial \theta} \right)}}$$

となる。よって,

$$\left(\frac{\partial \text{E}(\hat{\theta}_n)}{\partial \theta} \right)^2 \leq \text{V}(\hat{\theta}_n) \text{V} \left(\frac{\partial \log l(\theta; X)}{\partial \theta} \right)$$

すなわち,

$$\text{V}(\hat{\theta}_n) \geq \frac{\left(\frac{\partial \text{E}(\hat{\theta}_n)}{\partial \theta} \right)^2}{\text{V} \left(\frac{\partial \log l(\theta; X)}{\partial \theta} \right)}$$

$\text{E}(\hat{\theta}_n) = \theta$ のとき,

$$\begin{aligned} \text{V}(\hat{\theta}_n) &\geq \frac{\left(\frac{\partial \text{E}(\hat{\theta}_n)}{\partial \theta} \right)^2}{\text{V} \left(\frac{\partial \log l(\theta; X)}{\partial \theta} \right)} \\ &= \frac{1}{\text{E} \left[\left(\frac{\partial \log l(\theta; X)}{\partial \theta} \right)^2 \right]} \end{aligned}$$

さらに,

$$\text{E} \left[\left(\frac{\partial \log l(\theta; X)}{\partial \theta} \right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned} &= \text{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f(X_i; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] \\ &= \text{E} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \log f(X_i; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \text{E} \left[\left(\frac{\partial \log f(X_i; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] \quad (\text{同一の分布により}) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{E} \left[\left(\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] \\ &= n \text{E} \left[\left(\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] \\ &= n \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \log f(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 f(x; \theta) dx \end{aligned}$$

$X_i, i = 1, 2, \dots, n$, は互いに独立なので, 2 回目の等号が成り立つ。

したがって,

$$\text{V}(\hat{\theta}_n) \geq \frac{1}{n \text{E} \left[\left(\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right]} = \frac{\sigma^2(\theta)}{n}$$

となる。

次に,

$$\begin{aligned} & - \text{E} \left(\frac{\partial^2 \log f(X; \theta)}{\partial \theta^2} \right) \\ &= \text{E} \left[\left(\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] \\ &= \text{V} \left(\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

を証明する。

$$\int f(x; \theta) dx = 1$$

θ について微分

$$\int \frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta} dx = 0$$

(x の範囲は θ に依存しないもの, 微分 $\partial f(x; \theta)/\partial \theta$ が存在するものと仮定される)

上式の変形により

$$\int \frac{\partial \log f(x; \theta)}{\partial \theta} f(x; \theta) dx = 0$$

すなわち,

$$E\left(\frac{\partial \log f(x; \theta)}{\partial \theta}\right) = 0$$

さらに, θ について微分

$$\begin{aligned} & \int \frac{\partial^2 \log f(x; \theta)}{\partial \theta^2} f(x; \theta) dx \\ & + \int \frac{\partial \log f(x; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta} dx \\ & = \int \frac{\partial^2 \log f(x; \theta)}{\partial \theta^2} f(x; \theta) dx \\ & + \int \left(\frac{\partial \log f(x; \theta)}{\partial \theta}\right)^2 f(x; \theta) dx \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} & - E\left(\frac{\partial^2 \log f(X; \theta)}{\partial \theta \partial \theta'}\right) \\ & = E\left[\left(\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta}\right)^2\right] \\ & = V\left(\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta}\right) \end{aligned}$$

を得る。

したがって,

$$\begin{aligned} \sigma^2(\theta) &= \frac{1}{E\left[\left(\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]} \\ &= \frac{1}{E\left(\frac{\partial^2 \log f(X; \theta)}{\partial \theta^2}\right)} \end{aligned}$$

となる。

例: X_1, X_2, \dots, X_n は互いに独立で, すべて同一の正規分布 (すなわち, 平均 μ , 分散 σ^2 ですべて同一の分布) に従うものとする。ただし, σ^2 は既知とする。このとき, μ の推定量 \bar{X} は有効推定量である。

証明:

$V(\bar{X})$ は分布形にかかわらず, $\sigma^2 < \infty$ のとき, $\frac{\sigma^2}{n}$ となる。..... (A)

一方,

$$f(x; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right)$$

なので, クラメール・ラオの不等式は, この場合,

$$V(\bar{X}) \geq \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial \log f(X; \mu)}{\partial \mu}\right)^2\right]}$$

となる。

$$\log f(X; \mu) = -\frac{1}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(X - \mu)^2$$

なので,

$$\frac{\partial \log f(X; \mu)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}(X - \mu)$$

となる。

したがって,

$$\begin{aligned} V(\bar{X}) &\geq \frac{1}{nE\left[\left(\frac{1}{\sigma^2}(X - \mu)\right)^2\right]} \\ &= \frac{1}{n\frac{1}{\sigma^4}E[(X - \mu)^2]} \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

となる。..... (B)

(A) と (B) より, $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ (クラメール・ラオの不等式の下限) が成り立つので, \bar{X} は有効推定量であると言える。

十分性 (充分性, 充足性): X_1, X_2, \dots, X_n の同時密度関数が,

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) \\ & = h(x_1, x_2, \dots, x_n)g(\hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n); \theta) \end{aligned}$$

と分解できるとき, $\hat{\theta}_n \equiv \hat{\theta}_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$ は θ の十分推定量であるという。

すなわち,

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = h(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

が成り立つとき ($\hat{\theta}_n$ を与えたときの X_1, X_2, \dots, X_n の条件付き分布が母数 θ に依存しないとき), $\hat{\theta}_n \equiv \hat{\theta}_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$ は θ の十分推定量となる。

\Rightarrow 標本 X_1, X_2, \dots, X_n に含まれている θ に関する情報は, すべて $\hat{\theta}_n$ に含まれている。

X_1, X_2, \dots, X_n は互いに独立で, すべて同一の正規分布 (すなわち, 平均 μ , 分散 σ^2 ですべて同一の分布) に従う

ものとする。ただし、 σ^2 は既知とする。このとき、 \bar{X} は十分推定量である。

証明：

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu) \\ &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \mu) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \\ &\quad \times \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu)^2 \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{2\pi\sigma^2})^{n-1}} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right) \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/n}} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2/n} (\bar{x} - \mu)^2 \right) \\ &= h(x_1, x_2, \dots, x_n) g(\bar{x}; \mu) \end{aligned}$$

以上のように、分解可能である。

したがって、 \bar{X} は十分推定量である。

十分推定量の補足

Rao-Blackwell の定理：

t を θ の十分統計量、 $\hat{\theta}_n$ を θ の不偏推定量とする。このとき、 $E(\hat{\theta}_n|t)$ は θ の不偏推定量で、しかも、 $\hat{\theta}_n$ よりも分散は小さい。

⇒ 任意の不偏推定量 $\hat{\theta}_n$ について、 $\hat{\theta}_n = v(t)$ でない限り (不偏推定量 $\hat{\theta}_n$ が t だけの関数でない限り)、 $v(t) = E(\hat{\theta}_n|t)$ を作るにより改善される。

どの $\hat{\theta}_n$ に対しても、同じ $v(t)$ が一意に決まれば、それ以上の改善は出来ないので、 $v(t)$ は θ のあらゆる不偏推定量の中で最小な分散を持つことになる。

⇒ $v(t)$ は有効推定量

一致性： n が大きくなるにつれて、任意の $\epsilon > 0$ について、

$$P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \epsilon) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

となるとき、 $\hat{\theta}_n$ は θ の一致推定量であるという。

X_1, X_2, \dots, X_n は互いに独立で、すべて同一の正規分布 (すなわち、平均 μ 、分散 σ^2 ですべて同一の分布) に従う

ものとする。ただし、 σ^2 は既知とする。このとき、 \bar{X} は一致推定量である。

証明：

チェビシエフの不等式：

$$P(|X - \mu| > \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

ただし、 $E(X) = \mu, V(X) = \sigma^2$ とする。

ここで、 X を \bar{X} にして、 $E(\bar{X}), V(\bar{X})$ を求める。

$$E(\bar{X}) = \mu, \quad V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

を得る。

したがって、 $n \rightarrow \infty$ のとき、

$$P(|\bar{X} - \mu| > \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \rightarrow 0$$

となる。

よって、 \bar{X} は μ の一致推定量である。

定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta \quad (\text{漸近的な不偏})$$

かつ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\hat{\theta}_n) = 0$$

のとき、 $\hat{\theta}_n$ は θ の一致推定量となる。

8.3 推定量の求め方：最尤法、積率法、最小二乗法

8.3.1 最尤法

標本 X_1, X_2, \dots, X_n の密度関数：

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

θ は未知母数 ⇒ $\hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ によって推定

$$l(\theta) = l(\theta; x) = l(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

のように、 θ の関数として考える。

$l(\theta)$ ：尤度関数

尤度関数を最大にする θ を $\hat{\theta}_n$ とする。

$\hat{\theta}_n \equiv \hat{\theta}_n(X_1, X_2, \dots, X_n) \Rightarrow$ 最尤推定量

$\hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \implies$ 最尤推定値
すなわち,

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

を解くことによって, 最尤推定量 $\hat{\theta}_n \equiv \hat{\theta}_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$ が得られる。

最尤推定量の性質:

小標本について (n が小さいとき):

- 一般に, 最尤推定量は不偏性を持っていないが, 適当な変換によって, 不偏推定量を作ることが出来る場合が多い。
- 有効推定量が存在すれば (すなわち, クラメール・ラオの不等式の等号を満たすような推定量が存在するならば), 最尤推定量は有効推定量に一致する。
- 十分統計量が存在すれば, 最尤推定量は十分統計量の関数となる。

大標本について (n が大きいとき):

$n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

となる。 \implies 一致性, 漸近的正規性, 漸近の有効性
ただし,

$$\sigma^2 = \sigma^2(\theta) = \frac{1}{E \left[\left(\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right]}$$

すなわち, $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sigma(\theta)} = \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma(\theta)/\sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1)$$

となる。

したがって, 厳密ではないが, n が大きいとき,

$$\hat{\theta}_n \sim N \left(\theta, \frac{\sigma^2(\theta)}{n} \right)$$

と近似できる。

すなわち, $n \rightarrow \infty$ のとき, $\hat{\theta}_n$ の分散はクラメール・ラオの不等式の下限 $\frac{\sigma^2(\theta)}{n}$ に近づくことを意味する。

\implies 漸近的に有効推定量

さらに, 分母の θ を最尤推定量 $\hat{\theta}_n$ で置き換えて, $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma(\hat{\theta}_n)/\sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1)$$

となる。

実際には, n が大きいとき,

$$\hat{\theta}_n \sim N \left(\theta, \frac{\sigma^2(\hat{\theta}_n)}{n} \right)$$

と近似して用いる。

例:

X_1, X_2, \dots, X_n は互いに独立で, すべて同一の正規分布 (すなわち, 平均 μ , 分散 σ^2 ですべて同一の分布) に従うものとする。 μ, σ^2 の最尤推定量を求める。

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu, \sigma^2) \\ &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \mu, \sigma^2) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} (x_i - \mu)^2 \right) \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right) \\ &= l(\mu, \sigma^2) \end{aligned}$$

対数をとる。(最大化しやすくなる場合が多い)

$$\begin{aligned} \log l(\mu, \sigma^2) &= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \end{aligned}$$

対数尤度関数 $\log l(\mu, \sigma^2)$ を μ と σ^2 について微分して, ゼロと置く。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log l(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \\ &= 0 \\ \frac{\partial \log l(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

この2つの連立方程式を解く。

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

μ, σ^2 の最尤推定量は,

$$\bar{X}, S^{**2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

となる。

$E(\bar{X}) = \mu$ なので, μ の最尤推定量 \bar{X} は不偏推定量である。

$E(S^{**2}) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \neq \sigma^2$ なので, σ^2 の最尤推定量 S^{**2} は不偏推定量でない。

例:

X_1, X_2, \dots, X_n は互いに独立で, すべて同一のベルヌイ分布ですべて同一の分布に従うものとする。すなわち, X の確率関数は $P(X = x) = f(x; p) = p^x(1-p)^{1-x}, x = 0, 1,$ となる。 p の最尤推定量を求める。

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, \dots, x_n; p) \\ &= \prod_{i=1}^n f(x_i; p) \\ &= \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} \\ &= p^{\sum_i x_i} (1-p)^{n-\sum_i x_i} \\ &= l(p) \end{aligned}$$

対数をとる。

$$\log l(p) = \left(\sum_i x_i \right) \log(p) + \left(n - \sum_i x_i \right) \log(1-p)$$

対数尤度関数 $\log l(p)$ を p について微分して, ゼロと置く。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log l(p)}{\partial p} &= \frac{\sum_i x_i}{p} - \frac{n - \sum_i x_i}{1-p} \\ &= \frac{\sum_i x_i - np}{p(1-p)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

この方程式を解く。

$$p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

p の最尤推定量は,

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$$

となる。

$E(\bar{X}) = p$ なので, p の最尤推定量 \bar{X} は不偏推定量である。 X がベルヌイ分布 $f(x; p)$ のとき, $E(X) = p$ に注意。

例:

X_1, X_2, \dots, X_n は互いに独立で, すべて同一のポアソン分布(すなわち, 平均 λ ですべて同一の分布)に従うものとする。 λ の最尤推定量を求める。

ポアソン分布の確率関数は,

$$P(X = x) = f(x; \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

なので, 尤度関数は,

$$\begin{aligned} l(\lambda) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} \\ &= \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^n x_i!} \end{aligned}$$

対数尤度関数は,

$$\log l(\lambda) = \log(\lambda) \sum_{i=1}^n x_i - n\lambda - \log\left(\prod_{i=1}^n x_i!\right)$$

となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log l(\lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i - n \\ &= 0 \end{aligned}$$

これを解いて, λ の最尤推定量 $\hat{\lambda}$ は,

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$$

となる。

$\hat{\lambda}$ は, λ の不偏推定量, 有効推定量, 十分推定量, 一致推定量である。

証明:

X がパラメータ λ のポアソン分布に従うとき,

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

となる。

不偏性：

$$\begin{aligned} E(\hat{\lambda}) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda \\ &= \lambda \end{aligned}$$

有効性：

$$\begin{aligned} V(\hat{\lambda}) &= V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \lambda \\ &= \frac{\lambda}{n} \\ &= \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial \log f(X; \lambda)}{\partial \lambda}\right)^2\right]} \\ &= \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial (X \log \lambda - \lambda - \log X!)}{\partial \lambda}\right)^2\right]} \\ &= \frac{1}{nE\left[\left(\frac{X}{\lambda} - 1\right)^2\right]} \\ &= \frac{\lambda^2}{nE[(X - \lambda)^2]} \\ &= \frac{\lambda^2}{nV(X)} \\ &= \frac{\lambda^2}{n\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{n} \end{aligned}$$

したがって、

$$V(\hat{\lambda}) = \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial \log f(X; \lambda)}{\partial \lambda}\right)^2\right]}$$

となり、 $V(\hat{\lambda})$ は、クラメール・ラオの下限に一致する。よって、 $\hat{\lambda}$ は有効推定量である。

十分性：

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda) &= \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^n x_i!} \\ &= \frac{\lambda^{n\bar{x}} e^{-n\lambda}}{(n\bar{x})!} \frac{(n\bar{x})!}{\prod_{i=1}^n x_i!} \\ &= g(\bar{x}; \lambda) h(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

と分解できる。

一致性：

$$E(\bar{X}) = \lambda, \quad V(\bar{X}) = \frac{\lambda}{n}$$

なので、チェビシエフの不等式に当てはめる。

$$P(|\bar{X} - \lambda| > \epsilon) < \frac{\lambda}{n\epsilon^2} \rightarrow \infty$$

したがって、一致性も成り立つ。

8.3.2 積率法 (モーメント法)

ν 次の原点の回りの積率： $E(X^\nu) \equiv \mu'_\nu = \mu'_\nu(\theta)$

$E(X^\nu)$ の推定量を $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^\nu$ とする。

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^\nu = \mu'_\nu(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k)$$

$\nu = 1, 2, \dots, k$ として、 k 個の連立方程式を $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k$ について解く。

その解：

$$\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

$$\hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

⋮

$$\hat{\theta}_k(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

⇒ 積率法 (モーメント法) による推定量

例：

X_1, X_2, \dots, X_n は互いに独立で、平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布に従うものとする。 μ, σ^2 の積率法による推定値を求める。

$$E(X) = \mu \implies \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \hat{\mu}$$

$$E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2 \implies \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \hat{\sigma}^2 + \hat{\mu}^2$$

連立方程式を解いて、

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

を得る。この場合、最尤推定量に一致する。

例：

X_1, X_2, \dots, X_n は互いに独立で、パラメータ α, β のガンマ分布に従うものとする。 α, β の積率法による推定値を求める。パラメータ α, β のガンマ分布とは次の分布である。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \text{ のとき,} \\ 0, & x \leq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

ただし、 $\Gamma(\alpha)$ はガンマ関数と呼ばれ、

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx,$$

と表される。ガンマ関数の性質は、 $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$,

$\Gamma(1) = 1, \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ である。このとき、

$$E(X) = \alpha\beta, \quad V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \alpha\beta^2$$

なので、

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X} = \hat{\alpha}\hat{\beta}, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 = \hat{\alpha}\hat{\beta}^2,$$

となる。よって、

$$\hat{\alpha} = \frac{(1/n) \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2}{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n\bar{X}}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{X}}{\hat{\alpha}} = \frac{n\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

を得る。

8.3.3 最小二乗法

X_i と μ の差 $X_i - \mu$ を考える。

$X_i - \mu$ の二乗和を最小にする μ を求める。

すなわち、

$$\min_{\mu} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

を最小にする μ を求める。⇒

$$\frac{dS(\mu)}{d\mu} = 0$$

の解を求める。ただし、

$$S(\mu) = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

とする。

$$\frac{dS(\mu)}{d\mu} = -2 \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) = 0$$

を満たす μ を $\hat{\mu}$ とする。⇒

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

を得る。⇒ 最小二乗推定量

9 標本分布

9.1 正規母集団の場合 (標本平均、標本不偏分散の標本分布)

大きさ n の無作為標本 $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 。

すべての $i = 1, 2, \dots, n$ について、 $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ とする。

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

9.1.1 正規分布：標本平均 \bar{X} の標本分布

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

証明：

積率母関数を利用する。 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき、 X の積率母関数 $\phi(\theta)$ は、

$$\begin{aligned} \phi(\theta) &\equiv E(e^{\theta X}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2 + \theta x} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2(\mu + \sigma^2\theta)x + \mu^2)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - (\mu + \sigma^2\theta))^2 + (\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)} dx \\
&= e^{\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - (\mu + \sigma^2\theta))^2} dx \\
&= \exp\left(\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\right)
\end{aligned}$$

と計算される。積分のところは、 $N(\mu + \sigma^2\theta, \sigma^2)$ の確率密度関数に注意

よって、 $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき、 X_i の積率母関数 $\phi_i(\theta)$ は、

$$\phi_i(\theta) = \exp\left(\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\right)$$

となる。

今、 \bar{X} の積率母関数 $\phi_{\bar{X}}(\theta)$ を考える。

$$\begin{aligned}
\phi_{\bar{X}}(\theta) &\equiv E(e^{\theta\bar{X}}) \\
&= E(e^{\theta\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i}) \\
&= E\left(\prod_{i=1}^n e^{\frac{\theta}{n}X_i}\right) \\
&= \prod_{i=1}^n E(e^{\frac{\theta}{n}X_i}) \\
&= \prod_{i=1}^n \phi_i\left(\frac{\theta}{n}\right) \\
&= \prod_{i=1}^n \exp\left(\mu\frac{\theta}{n} + \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{\theta}{n}\right)^2\right) \\
&= \exp\left(\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\theta^2}{n}\right) \\
&= \exp\left(\mu\theta + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}\theta^2\right)
\end{aligned}$$

となり、これは、平均 μ 、分散 σ^2/n の正規分布の積率母関数に一致する。

さらに、標準化によって、

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

を得る。これも、同様に、積率母関数で証明できる。

9.1.2 χ^2 (カイ自乗) 分布： 標本不偏分散 S^2 の標本分布

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

証明：

$$\frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

なので、

$$\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$$

$\frac{X_i - \mu}{\sigma}$, $i = 1, 2, \dots, n$ は互いに独立なので、

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$$

となる。(積率母関数によって証明可)

μ を \bar{X} で置き換えることによって、

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

を得る。(証明略)

9.1.3 t 分布： 標本平均 \bar{X} の標本分布

$Z \sim N(0, 1)$, $U \sim \chi^2(m)$, Z と U は独立のとき、

$$\frac{Z}{\sqrt{U/m}} \sim t(m)$$

となる。

これを利用して、 \bar{X} の標本分布を求める。

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ と $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ は独立なので (後述)、

$$\frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} / (n-1)}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

を得る。

(*) $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ と $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ の独立性

証明：

X_1, X_2, \dots, X_n は互いに独立に正規分布に従うので， $E((\bar{X} - \mu)S^2) = 0$ を証明すればよい。

$$\bar{X} - \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)$$

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left((X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu) \right)^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E((\bar{X} - \mu)S^2) &= \frac{1}{n-1} E\left((\bar{X} - \mu) \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^3 \right) \\ &= \frac{n}{n-1} E\left(\sum_{j=1}^n (X_j - \mu) \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \right) \\ &\quad - \frac{n}{n-1} E((\bar{X} - \mu)^3) \\ &= \frac{n}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (X_i - \mu)^2 (X_j - \mu) \right) \\ &\quad - \frac{n}{n-1} E((\bar{X} - \mu)^3) \\ &= \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E((X_i - \mu)^2 (X_j - \mu)) \\ &\quad - \frac{n}{n-1} E((\bar{X} - \mu)^3) \\ &= \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^n E((X_i - \mu)^3) \\ &\quad - \frac{n}{n-1} E((\bar{X} - \mu)^3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$Z \sim N(\mu_z, \sigma_z^2)$ のとき， $E((Z - \mu_z)^{2k-1}) = 0, k = 1, 2, \dots$ となる。(積率母関数より証明可)

したがって， $E((X_i - \mu)^3) = E((\bar{X} - \mu)^3) = 0$ となる。

よって，

$$E((\bar{X} - \mu)S^2) = 0$$

を得る。

9.1.4 F 分布

$U \sim \chi^2(n), V \sim \chi^2(m)$ ， U と V は独立のとき，

$$\frac{U/n}{V/m} \sim F(n, m)$$

となる。

公式：

$$t(m)^2 = F(1, m)$$

$$F(n, m) = 1/F(m, n)$$

9.2 その他の母集団の場合：標本平均 \bar{X} の標本分布

中心極限定理を利用する。

中心極限定理： 大きさ n の無作為標本 X_1, X_2, \dots, X_n すべての i について， $E(X_i) = \mu, V(X_i) = \sigma^2$ とする。

標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ の分布を考える。

$n \rightarrow \infty$ のとき，

$$\begin{aligned} \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} &= \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \\ &= \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1) \end{aligned}$$

が成り立つ。

さらに，分母の σ をその標本不偏分散 S で置き換えても，

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1)$$

が成り立つ。(証明略)

例題：母比率の推定量の標本分布： 離散型確率変数 X の取りうる値は $0, 1$ のどちらかで，その確率分布は，

$$P(X = x) = f(x) = p^x (1-p)^{1-x} \quad x = 0, 1$$

となる。すなわち，

$$P(X = 1) = p$$

$$P(X = 0) = 1 - p$$

となる。

何等かの実験を行い, 成功すれば $X = 1$, 失敗すれば $X = 0$ として, 確率変数 X に数値を割り当てる。

または, アンケート調査によって, Yes と答えれば $X = 1$, No と答えれば $X = 0$ として, 確率変数 X に数値を割り当てる。

このとき, $X = 1$ となる確率 $P(X = 1) = p$ を推定することを考える。

$E(X)$, $V(X)$ を求めておく。

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x x f(x) \\ &= \sum_{x=0}^1 x p^x (1-p)^{1-x} \\ &= p \end{aligned}$$

$\mu = E(X)$ のとき, $V(X) = E(X^2) - \mu^2$ により, まず, $E(X^2)$ を求める。

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_x x^2 f(x) \\ &= \sum_{x=0}^1 x^2 p^x (1-p)^{1-x} \\ &= p^2 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \mu^2 \\ &= p - p^2 \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

n 個の無作為標本 X_1, X_2, \dots, X_n を考える。

X_1, X_2, \dots, X_n はそれぞれ独立に, しかも上記のように, 同一のベルヌイ分布に従うものとする。

このときの母比率 p の推定量を $\hat{P} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ とする。

すなわち, \hat{P} は n 人の中で成功した回数 (または, Yes と答えた人数) を表し, 標本平均である。

中心極限定理を当てはめる。 $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\frac{\hat{P} - E(\hat{P})}{\sqrt{V(\hat{P})}} = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \rightarrow N(0, 1)$$

が成り立つ。 $E(\hat{P}), V(\hat{P})$ は

$$\begin{aligned} E(\hat{P}) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p \\ &= p \\ V(\hat{P}) &= V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) \leftarrow \text{互いに独立} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n p(1-p) \\ &= \frac{p(1-p)}{n} \end{aligned}$$

となることに注意。 $E(X_i) = p, V(X_i) = p(1-p)$ を途中で利用する。

さらに, 分母の p をその推定量 \hat{P} で置き換えても,

$$\frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})/n}} \rightarrow N(0, 1)$$

が成り立つ。(証明略)

9.3 その他の母集団の場合: 母数の推定量 $\hat{\theta}_n$ の標本分布 (一般化)

母集団の分布: $f(x; \theta)$

より一般的に, 母数 θ の推定量の標本分布を求める。

最尤推定量の性質を利用する。

すなわち, 母数 θ の最尤推定量 $\hat{\theta}_n$ の標本分布について: $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

となる。ただし,

$$\sigma^2 = \sigma^2(\theta) = \left(E \left[\left(\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right)^{-1}$$

となる。

標準化 (基準化) によって, $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sigma(\theta)} = \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma(\theta)/\sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1)$$

となる。

さらに, 分母の θ を最尤推定量 $\hat{\theta}_n$ で置き換えても, $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma(\hat{\theta}_n)/\sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1)$$

が成り立つ。(証明略)

10 区間推定法

母集団の分布が $f(x; \theta)$ で表されているとき, この母集団からの標本 X_1, X_2, \dots, X_n を使って, θ に依存しない 2 つの統計量 $\hat{\theta}_U(X_1, X_2, \dots, X_n), \hat{\theta}_L(X_1, X_2, \dots, X_n)$ を作り,

$$P(\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \dots, X_n) < \theta < \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \dots, X_n)) = 1 - \alpha$$

と表すことが出来たとき,

区間 $(\hat{\theta}_L(x_1, x_2, \dots, x_n), \hat{\theta}_U(x_1, x_2, \dots, x_n))$ を信頼係数 $1 - \alpha$ (または, 有意水準 α) の信頼区間と呼ぶ。
 $\hat{\theta}_L(x_1, x_2, \dots, x_n), \hat{\theta}_U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ をそれぞれ信頼下限, 信頼上限という。

一般に,

信頼区間の幅 $\hat{\theta}_U(X_1, X_2, \dots, X_n) - \hat{\theta}_L(X_1, X_2, \dots, X_n)$ が最小になることが望ましい。

10.1 母平均 μ の区間推定

10.1.1 正規母集団の場合 (小標本, 大標本共に)

大きさ n の無作為標本 $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 。すべての $i = 1, 2, \dots, n$ について, $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ とする。

母分散 σ^2 が既知のとき:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1),$$

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$z_{\alpha/2}$ は $100 \times \frac{\alpha}{2}$ % 点で, 確率 α が与えられると, 正規分布表から得られる。

したがって, $P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$

\bar{X} を \bar{x} で置き換えて, 信頼係数 $1 - \alpha$ の μ の信頼区間:

$$\Rightarrow \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

母分散 σ^2 が未知のとき:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1),$$

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}\right| < t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1 - \alpha$$

$t_{\alpha/2}(n-1)$ は $100 \times \frac{\alpha}{2}$ % 点で, 確率 α と自由度 $n-1$ が与えられると, t 分布表から得られる。

したがって, $P\left(\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$

$$1) \frac{S}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

\bar{X}, S^2 を \bar{x}, s^2 で置き換えて, 信頼係数 $1 - \alpha$ の μ の信頼区間:

$$\Rightarrow \left(\bar{x} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

10.1.2 その他の母集団の場合: 大標本 (n が大きいとき)

大きさ n の無作為標本 $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$

すべての $i = 1, 2, \dots, n$ について, $X_i \sim (\mu, \sigma^2)$ とする (正規分布を仮定する必要ない)。

母分散 σ^2 が既知のとき: n が大きいとき, 中心極限定理により, 以下が成り立つ。

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1),$$

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha$$

したがって, $P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx 1 - \alpha$

\bar{X} を \bar{x} で置き換えて, 信頼係数 $1 - \alpha$ の μ の信頼区間:

$$\Rightarrow \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

母分散 σ^2 が未知のとき： さらに，分母の σ^2 を標本不偏分散 S^2 で置き換えて，近似する。

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1),$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim N(0, 1),$$

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha$$

したがって， $P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) \approx 1 - \alpha$
 \bar{X} ， S^2 を \bar{x} ， s^2 で置き換えて，信頼係数 $1 - \alpha$ の μ の信頼区間： $\Rightarrow \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$

10.2 母分散 σ^2 の区間推定 (正規母集団)

大きさ n の無作為標本 $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$

すべての $i = 1, 2, \dots, n$ について， $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ とする

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

μ をその推定量 \bar{X} で置き換えると，

$$U = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

ただし， $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ (標本不偏分散) とする。

1. 自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布の下側確率，上側確率が $\alpha/2$ となる点を，それぞれ $\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$ ， $\chi_{\alpha/2}^2(n-1)$ とする。

2. $\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$

\Rightarrow 下側確率が $\alpha/2$ となる点

\Rightarrow 上側確率が $1 - \alpha/2$ となる点

3. $P(\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) < U < \chi_{\alpha/2}^2(n-1)) = 1 - \alpha$

$$P(\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_{\alpha/2}^2(n-1)) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}\right) = 1 - \alpha$$

4. 推定量 S^2 をその推定値 s^2 で置き換えて，

信頼係数 $1 - \alpha$ の σ^2 の信頼区間は，

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}\right)$$

となる。

ただし， $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ とする。

10.3 母比率 p の区間推定 (ベルヌイ試行)

p は次の確率を表す。

$$P(X = 1) = p$$

$$P(X = 0) = 1 - p$$

すなわち，何等かの実験を行い，成功すれば $X = 1$ ，失敗すれば $X = 0$ として，確率変数 X に数値を割り当てる。または，アンケート調査によって，Yes と答えれば $X = 1$ ，No と答えれば $X = 0$ として，確率変数 X に数値を割り当てる。

このとき， $X = 1$ となる確率 $P(X = 1) = p$ を推定することを考える。

n 個の無作為標本 X_1, X_2, \dots, X_n を考える。

X_1, X_2, \dots, X_n はそれぞれ独立に，しかも上記のように，同一のベルヌイ分布に従うものとする。

母比率 p の推定量は $\hat{P} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ とする。

すなわち， \hat{P} は n 人の中で成功した回数 (または，Yes と答えた人数) を表し，標本平均である。

$E(\hat{P}) = p$ ， $V(\hat{P}) = p(1-p)/n$ を用いて，中心極限定理により， n が大きいとき，近似的に，

$$\frac{\hat{P} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0, 1)$$

を得る。

さらに，分母の p をその推定量 \hat{P} で置き換えて，近似する。

$$\frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})/n}} \sim N(0, 1),$$

$$P\left(\left|\frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})/n}}\right| < z_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha$$

したがって,

$$P\left(\hat{P} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} < p < \hat{P} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\right) \approx 1 - \alpha$$

\hat{P} を \hat{p} で置き換えて, 信頼係数 $1 - \alpha$ の p の信頼区間:

$$\Rightarrow \left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$$

11 統計的検定 I

11.1 仮説検定の考え方

仮説検定: 母集団の分布 $f(x; \theta)$ が与えられているときに, 母数 θ についての仮説 $\theta = \theta_0$ が正しいかどうかを, 標本 (X_1, X_2, \dots, X_n) の実現値 (x_1, x_2, \dots, x_n) から判断する。

帰無仮説 $H_0: \theta = \theta_0$

2種類の誤り: 検定しようとする仮説 \Rightarrow 帰無仮説 H_0
 帰無仮説が正しくないときに成り立つ仮説 \Rightarrow 対立仮説 H_1

| | H_0 は正しい | H_0 は正しくない |
|----------|--------------------------------|-------------------------------|
| H_0 採択 | 正しい判定 | 第2種の誤り (確率 β) |
| H_0 棄却 | 第1種の誤り (確率 $\alpha =$ 有意水準) | 正しい判定 ($1 - \beta =$ 検出力) |

検定の手続き

- 母数について帰無仮説 H_0 を立てる。
- ある適当な統計量を考えて, H_0 が正しいときにこの統計量が従う分布を導く。
ある適当な統計量 \Rightarrow 検定統計量
- 実際の標本(データ)からこの統計量の値(統計値)を計算する。
- 統計量の分布と統計値とを比較する。

この統計値が分布の端にあれば, H_0 は起こりにくいと判定され, H_0 を棄却する。

起こりにくいととして H_0 を棄却する領域 \Rightarrow 棄却域 R (reject の意味)

起こり得るとして H_0 を採択する領域 \Rightarrow 採択域 A (accept の意味)

検定統計量 $T = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$

第1種の誤りの確率 = 有意水準 α (H_0 が正しいにもかかわらず, H_0 を棄却する確率)

$$P(f(X_1, X_2, \dots, X_n) \in R | H_0 \text{ が正しい}) = \alpha$$

第2種の誤りの確率 = β (H_0 が正しくないにもかかわらず, H_0 を採択する確率)

$$P(f(X_1, X_2, \dots, X_n) \in A | H_0 \text{ が正しくない}) = \beta$$

検出力 = $1 - \beta$ (H_0 が正しくないとき, H_0 を棄却する確率)

$$P(f(X_1, X_2, \dots, X_n) \in R | H_0 \text{ が正しくない}) = 1 - \beta$$

有意水準: $\alpha = 0.05, 0.01$ を選ぶ。

検出力の導出方法: 正規母集団で, 分散が既知の場合: X_1, X_2, \dots, X_n の n 個の確率変数は, それぞれ独立に, 平均 μ , 分散 σ^2 の正規分布をするものとする。ただし, 分散 σ^2 は既知とする。

帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$, 対立仮説 $H_1: \mu = \mu_1$ の検定を考える。 $\mu_1 > \mu_0$ とする。

検出力を求める。

検出力とは, 対立仮説のもとで, 帰無仮説を棄却する確率である。

標本平均 $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ から,

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

で, 帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ のもとで,

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

となる。

よって, 帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ のもとで, 帰無仮説を棄却する棄却域は, $P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha\right) = \alpha$ なので,

$\bar{X} > \mu_0 + z_\alpha \sigma / \sqrt{n}$ となる。

対立仮説 $H_1: \mu = \mu_1$ のもとで, 帰無仮説を棄却する確率(検出力)を求める。

すなわち，対立仮説 $H_1: \mu = \mu_1$ のもとで，
 $P(\bar{X} > \mu_0 + z_\alpha \sigma / \sqrt{n})$ の確率を求めればよい。

対立仮説 $H_1: \mu = \mu_1$ のもとで，

$$\frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1) \text{ となるので，}$$

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} > \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} + z_\alpha\right)$$

となる確率が検出力となる。($\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} + z_\alpha$ に対応する確率を標準正規分布表で調べる。)

検定の種類:

1. 母平均 μ の検定

(a) 正規母集団の場合 (小標本，大標本共に)

- i. 母分散 σ^2 は既知 $\implies N(0, 1)$
- ii. 母分散 σ^2 は未知 $\implies t(n-1)$

(b) その他の母集団の場合：大標本 (n が大きいとき) $\implies N(0, 1)$

2. 2つの標本の母平均の差 ($H_0: \mu_1 = \mu_2$) の検定

(a) 小標本 (n_1, n_2 が小さいとき)

- i. σ_1^2 と σ_2^2 は既知で，正規母集団の場合 $\implies N(0, 1)$
- ii. σ_1^2 と σ_2^2 は未知 (一般的に) \implies 検定不可能 (検定統計量の分布を導出できないため)

(b) その他の母集団：大標本 (n_1, n_2 が大きいとき) $\implies N(0, 1)$

3. 母分散 σ^2 の検定で，正規母集団の場合 $\implies \chi^2(n-1)$

4. 2つの標本の母分散が等しいかどうか ($H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$) の検定で，正規母集団の場合 $\implies F(n_1-1, n_2-1)$

5. 母比率 p の検定 (ペルヌイ試行) $\implies N(0, 1)$

11.2 母平均 μ の検定

11.2.1 正規母集団の場合 (小標本，大標本共に)

大きさ n の無作為標本 $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 。 $i = 1, 2, \dots, n$ について， $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ とする。

母分散 σ^2 は既知のとき： \bar{X} の分布は， $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ なので，帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ が正しいもとで，

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1) \text{ となる } (\mu \text{ を } \mu_0 \text{ で置き換える)。こ}$$

のとき，検定統計量 $\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ 。検定統計量の値 $\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ 。

1. 対立仮説 $H_1: \mu < \mu_0$ (片側検定)

$P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < -z_\alpha\right) = \alpha$ なので， $\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < -z_\alpha$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ を棄却する。

2. 対立仮説 $H_1: \mu > \mu_0$ (片側検定)

$P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > z_\alpha\right) = \alpha$ なので， $\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > z_\alpha$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ を棄却する。

3. 対立仮説 $H_1: \mu \neq \mu_0$ (両側検定)

$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right| > z_{\alpha/2}\right) = \alpha$ なので， $\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right| > z_{\alpha/2}$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ を棄却する。

母分散 σ^2 は未知のとき： \bar{X} の分布は， $\frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$ なので，帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ が正しいもとで，

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1) \text{ となる } (\mu \text{ を } \mu_0 \text{ で置き換える)。こ}$$

のとき，検定統計量 $\frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$ 。検定統計量の値 $\frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$ 。

1. 対立仮説 $H_1: \mu < \mu_0$ (片側検定)

$P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} < -t_\alpha(n-1)\right) = \alpha$ なので， $\frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} < -t_\alpha(n-1)$ のとき，有意水準 α で $H_0: \mu = \mu_0$ を棄却する。

2. 対立仮説 $H_1: \mu > \mu_0$ (片側検定)

$P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} > t_\alpha(n-1)\right) = \alpha$ なので， $\frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} > t_\alpha(n-1)$ のとき，有意水準 α で $H_0: \mu = \mu_0$ を棄却する。

3. 対立仮説 $H_1: \mu \neq \mu_0$ (両側検定)

$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| > t_{\alpha/2}(n-1)\right) = \alpha$ なので、 $\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| > t_{\alpha/2}(n-1)$ のとき、有意水準 α で $H_0: \mu = \mu_0$ を棄却する。

11.2.2 その他の母集団の場合：大標本 (n が大きいとき)

大きさ n の無作為標本 $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 。 $i = 1, 2, \dots, n$ について、 $X_i \sim (\mu, \sigma^2)$ とする (正規分布の仮定は不必要)。

母分散 σ^2 は既知のとき： 近似的に $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ が成り立つので、帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ が正しいもとで、

$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ となる (μ を μ_0 で置き換える)。こ

のとき、検定統計量 $\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 。 検定統計量の値 $\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 。

1. 対立仮説 $H_1: \mu < \mu_0$ (片側検定)

$P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha\right) \approx \alpha$ なので、 $\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha$ のとき、有意水準 α で帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ を棄却する。

2. 対立仮説 $H_1: \mu > \mu_0$ (片側検定)

$P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha\right) \approx \alpha$ なので、 $\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha$ のとき、有意水準 α で帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ を棄却する。

3. 対立仮説 $H_1: \mu \neq \mu_0$ (両側検定)

$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{\alpha/2}\right) \approx \alpha$ なので、 $\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{\alpha/2}$ のとき、有意水準 α で帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ を棄却する。

母分散 σ^2 は未知のとき： 近似的に、 $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ が成り立つので、帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ が正しいもとで、

$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ となる (μ を μ_0 で置き換える)。こ

のとき、検定統計量 $\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ 。 検定統計量の値 $\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ 。

1. 対立仮説 $H_1: \mu < \mu_0$ (片側検定)

$P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < -z_\alpha\right) \approx \alpha$ なので、 $\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} < -z_\alpha$ のとき、有意水準 α で帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ を棄却する。

2. 対立仮説 $H_1: \mu > \mu_0$ (片側検定)

$P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > z_\alpha\right) \approx \alpha$ なので、 $\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > z_\alpha$ のとき、有意水準 α で帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ を棄却する。

3. 対立仮説 $H_1: \mu \neq \mu_0$ (両側検定)

$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| > z_{\alpha/2}\right) \approx \alpha$ なので、 $\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| > z_{\alpha/2}$ のとき、有意水準 α で帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ を棄却する。

11.3 2つの標本の母平均の差の検定

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ の検定

11.3.1 小標本 (n_1, n_2 が小さいとき)

・第1グループ：大きさ n_1 の無作為標本。 $i = 1, 2, \dots, n$ について、 $X_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ とする。

・第2グループ：大きさ n_2 の無作為標本。 $i = 1, 2, \dots, n$ について、 $X_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ とする。

σ_1^2 と σ_2^2 は既知で、正規母集団の場合： 母平均の差を検定したいので、統計量 $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ の分布を考える。

$E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$,

また、 $V(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$ を得る。

したがって、 $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$ が成り立つ (証明略)。さらに、標準化によって、 $\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim$

$N(0, 1)$ を得るので、帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ が正しいも

とで、 $\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$ となる ($\mu_1 - \mu_2 = 0$

を代入する)。このとき、検定統計量 $\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ 。 検

定統計量の値 $\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ 。

1. 対立仮説 $H_1: \mu_1 < \mu_2$ (片側検定)

$P\left(\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < -z_\alpha\right) \approx \alpha$ なので、

$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} < -z_\alpha$ のとき, 有意水準 α で H_0 を棄却する。

2. 対立仮説 $H_1: \mu_1 > \mu_2$ (片側検定)

$P\left(\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} > z_\alpha\right) \approx \alpha$ なので,

$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} > z_\alpha$ のとき, 有意水準 α で H_0 を棄却する。

3. 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ (両側検定)

$P\left(\left|\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}\right| > z_{\alpha/2}\right) \approx \alpha$ なので,

$\left|\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}\right| > z_{\alpha/2}$ のとき, 有意水準 α で H_0 を棄却する。

σ_1^2 と σ_2^2 は未知のとき: 検定統計量の分布を導出できないため, 検定不可能 (正規分布や t 分布にはならない)

11.3.2 その他の母集団: 大標本 (n_1, n_2 が共に大きいとき)

・第1グループ: 大きさ n_1 の無作為標本。 $i = 1, 2, \dots, n$ について, $X_{1i} \sim (\mu_1, \sigma_1^2)$ とする (正規分布の仮定は不必要)。

・第2グループ: 大きさ n_2 の無作為標本。 $i = 1, 2, \dots, n$ について, $X_{2i} \sim (\mu_2, \sigma_2^2)$ とする (正規分布の仮定は不必要)。

σ_1^2 と σ_2^2 は既知のとき: 近似的に,

$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \sim N(0, 1)$ を得るので,

帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ が正しいもとで,

$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \sim N(0, 1)$ となる ($\mu_1 - \mu_2 = 0$ を代入する)。

このとき, 検定統計量 $\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$ 。 検定統計量の値

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}。$$

1. 対立仮説 $H_1: \mu_1 < \mu_2$ (片側検定)

$P\left(\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} < -z_\alpha\right) \approx \alpha$ なので,

$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} < -z_\alpha$ のとき, 有意水準 α で H_0 を棄却する。

2. 対立仮説 $H_1: \mu_1 > \mu_2$ (片側検定)

$P\left(\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} > z_\alpha\right) \approx \alpha$ なので,

$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} > z_\alpha$ のとき, 有意水準 α で H_0 を棄却する。

3. 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ (両側検定)

$P\left(\left|\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}\right| > z_{\alpha/2}\right) \approx \alpha$ なので,

$\left|\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}\right| > z_{\alpha/2}$ のとき, 有意水準 α で H_0 を棄却する。

σ_1^2 と σ_2^2 は未知のとき: 近似的に,

$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}} \sim N(0, 1)$ を得るので,

帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ が正しいもとで,

$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}} \sim N(0, 1)$ となる ($\mu_1 - \mu_2 = 0$ を代入する)。

入する)。

このとき, 検定統計量 $\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}}$ 。 検定統計量の値

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}。$$

1. 対立仮説 $H_1: \mu_1 < \mu_2$ (片側検定)

$P\left(\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}} < -z_\alpha\right) \approx \alpha$ なので,

$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}} < -z_\alpha$ のとき, 有意水準 α で H_0 を棄却する。

2. 対立仮説 $H_1: \mu_1 > \mu_2$ (片側検定)

$$P\left(\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}} > z_\alpha\right) \approx \alpha \text{ なので,}$$

$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}} > z_\alpha$ のとき, 有意水準 α で H_0 を棄却する。

3. 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ (両側検定)

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}}\right| > z_{\alpha/2}\right) \approx \alpha \text{ なので,}$$

$\left|\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}\right| > z_{\alpha/2}$ のとき, 有意水準 α で H_0 を棄却する。

11.4 母分散 σ^2 の検定で, 正規母集団の場合

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ を得るので, 帰無仮説 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ が正しいもとで, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$ となる (σ^2 を σ_0^2 で置き換える)。このとき, 検定統計量 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ 。検定統計量の値 $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$ 。

1. 対立仮説 $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ (片側検定)

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\alpha}^2(n-1)\right) = \alpha \text{ なので,}$$

$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$ のとき, 有意水準 α で $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ を棄却する。

2. 対立仮説 $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ (片側検定)

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi_\alpha^2(n-1)\right) = \alpha \text{ なので,}$$

$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi_\alpha^2(n-1)$ のとき, 有意水準 α で $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ を棄却する。

3. 対立仮説 $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ (両側検定)

$$P\left(\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi_{\alpha/2}^2(n-1)\right) = \alpha \text{ なので,}$$

$\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) < \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$ のとき, 有意水準 α で H_0 を棄却する。

11.5 2つの標本の母分散が等しいかどうかの検定で, 正規母集団の場合

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ の検定

・第1グループ: 大きさ n_1 の無作為標本。 $i = 1, 2, \dots, n$ について, $X_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ とする。

・第2グループ: 大きさ n_2 の無作為標本。 $i = 1, 2, \dots, n$ について, $X_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ とする。

$j = 1, 2$ について,

$$S_j = \frac{1}{n_j - 1} \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ji} - \bar{X}_j)^2, \quad \bar{X}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} X_{ji}$$

を定義する。

$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$ を得るので, 帰無仮説 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ が正しいもとで,

$\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$ となる。このとき, 検定統計量 $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ 。検定統計量の値 $\frac{s_1^2}{s_2^2}$ 。

1. 対立仮説 $H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ (片側検定)

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)\right) = \alpha \text{ なので,}$$

$\frac{s_1^2}{s_2^2} < F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ のとき, 有意水準 α で $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ を棄却する。

2. 対立仮説 $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ (片側検定)

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)\right) = \alpha \text{ なので,}$$

$\frac{s_1^2}{s_2^2} > F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)$ のとき, 有意水準 α で $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ を棄却する。

3. 対立仮説 $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ (両側検定)

$$P\left(F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) < \frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)\right) = \alpha \text{ なので,}$$

$F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) < \frac{s_1^2}{s_2^2} < F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)$
 のとき、有意水準 α で H_0 を棄却する。

$$F_{1-\alpha}(n, m) = \frac{1}{F_\alpha(m, n)} \text{ に注意}$$

11.6 母比率 p の検定 (ベルヌイ試行)

中心極限定理により、近似的に、 $\frac{\hat{P} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0, 1)$
 を得るので、帰無仮説 $H_0: p = p_0$ が正しいもとで、

$$\frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \sim N(0, 1) \text{ となる } (p \text{ を } p_0 \text{ で置き換え}$$

る)。このとき、検定統計量 $\frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$ 。検定統計量

の値 $\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$ 。

1. 対立仮説 $H_1: \mu < \mu_0$ (片側検定)

$$P\left(\frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} < -z_\alpha\right) \approx \alpha \text{ なので,}$$

$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} < -z_\alpha$ のとき、有意水準 α で $H_0: \mu = \mu_0$ を棄却する。

2. 対立仮説 $H_1: \mu > \mu_0$ (片側検定)

$$P\left(\frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} > z_\alpha\right) \approx \alpha \text{ なので,}$$

$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} > z_\alpha$ のとき、有意水準 α で $H_0: \mu = \mu_0$ を棄却する。

3. 対立仮説 $H_1: \mu \neq \mu_0$ (両側検定)

$$P\left(\left|\frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\right| > z_{\alpha/2}\right) \approx \alpha \text{ なので,}$$

$\left|\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\right| > z_{\alpha/2}$ のとき、有意水準 α で H_0 を棄却する。

12 統計的検定 II：大標本検定

12.1 ワルド (Wald) 検定

最尤推定量の性質を利用

母集団の分布： $f(x; \theta)$

母数 θ の最尤推定量 $\hat{\theta}_n$ の標本分布について：

$n \rightarrow \infty$ のとき、

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sigma^2(\theta) \\ &= \left(E \left[\left(\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right)^{-1} \\ &= - \left(E \left(\frac{\partial^2 \log f(X; \theta)}{\partial \theta^2} \right) \right)^{-1} \end{aligned}$$

となる。

$\frac{\sigma^2}{n}$ はクラメール・ラオの下限に一致することに注意。

(復習) クラメール・ラオの不等式：

母数 θ の不偏推定量 $\hat{\theta}_n$ について、

$$V(\hat{\theta}_n) \geq \frac{\sigma^2}{n}$$

が成り立つ。 σ^2 は上で定義されたものとなる。

言い換えると、

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1)$$

を得る。

さらに、分母の θ を最尤推定量 $\hat{\theta}_n$ で置き換えても、 $n \rightarrow \infty$ のとき、近似的に、

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma(\hat{\theta}_n)/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

が成り立つ。

したがって、 $H_0: \theta = \theta_0$ が正しいもとで、 $n \rightarrow \infty$ のとき、近似的に、

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta_0}{\sigma(\hat{\theta}_n)/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

が成り立つ。

よって、 $H_0: \theta = \theta_0$ と $H_1: \theta \neq \theta_0$ について、

$\hat{\theta}_n$ を実現値で置き換えて、

$$\left| \frac{\hat{\theta}_n - \theta_0}{\sigma(\hat{\theta}_n)/\sqrt{n}} \right| > z_{\alpha/2} \text{ のとき, } H_0 \text{ を棄却する。}$$

(*) 検定を行う段階では、 $\hat{\theta}_n$ を最尤推定値とみなしていることに注意。すなわち、 $\hat{\theta}_n$ はもともと最尤推定量で X_1, X_2, \dots, X_n の関数である。しかし、検定を行う段階では、 X_1, X_2, \dots, X_n を x_1, x_2, \dots, x_n で置き換えて、 $\hat{\theta}_n$ を最尤推定値とみなしている。

また、 $H_0: \theta = \theta_0$ と $H_1: \theta > \theta_0$ について、 $\hat{\theta}_n$ を実現値で置き換えて、

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta_0}{\sigma(\hat{\theta}_n)/\sqrt{n}} > z_\alpha \text{ のとき, } H_0 \text{ を棄却する。}$$

最後に、 $H_0: \theta = \theta_0$ と $H_1: \theta < \theta_0$ について、 $\hat{\theta}_n$ を実現値で置き換えて、

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta_0}{\sigma(\hat{\theta}_n)/\sqrt{n}} < -z_\alpha \text{ のとき, } H_0 \text{ を棄却する。}$$

例題： 指数分布から生成された n 個の互いに独立な確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n を考える。指数分布は、

$$f(x; \gamma) = \gamma e^{-\gamma x} \quad x > 0$$

である。

帰無仮説 $H_0: \gamma = \gamma_0$ 、対立仮説 $H_1: \gamma \neq \gamma_0$ を、ワルド検定によって、検定する。

一般的に、母数 γ の最尤推定量 $\hat{\gamma}_n$ の標本分布について、 $n \rightarrow \infty$ のとき、近似的に、

$$\frac{\hat{\gamma}_n - \gamma}{\sigma(\hat{\gamma}_n)/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

が成り立つ。ただし、

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sigma^2(\gamma) \\ &= \left(\mathbb{E} \left[\left(\frac{d \log f(X; \gamma)}{d\gamma} \right)^2 \right] \right)^{-1} \\ &= - \left(\mathbb{E} \left(\frac{d^2 \log f(X; \gamma)}{d\gamma^2} \right) \right)^{-1} \end{aligned}$$

となる。

したがって、 $H_0: \gamma = \gamma_0$ が正しいもとで、 $n \rightarrow \infty$ のとき、近似的に、

$$\frac{\hat{\gamma}_n - \gamma_0}{\sigma(\hat{\gamma}_n)/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

が成り立つ。

よって、 $H_0: \gamma = \gamma_0$ と $H_1: \gamma \neq \gamma_0$ について、

$\hat{\gamma}_n$ を実現値で置き換えて、

$$\left| \frac{\hat{\gamma}_n - \gamma_0}{\sigma(\hat{\gamma}_n)/\sqrt{n}} \right| > z_{\alpha/2} \text{ のとき, } H_0 \text{ を棄却する。}$$

まず、 $\sigma^2(\gamma)$ を求める。

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sigma^2(\gamma) \\ &= - \left(\mathbb{E} \left(\frac{d^2 \log f(X; \gamma)}{d\gamma^2} \right) \right)^{-1} \\ &= \gamma^2 \end{aligned}$$

$\log f(X; \gamma)$ の 2 回微分は、

$$\begin{aligned} \frac{d \log f(X; \gamma)}{d\gamma} &= \frac{1}{\gamma} - X \\ \frac{d^2 \log f(X; \gamma)}{d\gamma^2} &= -\frac{1}{\gamma^2} \end{aligned}$$

に注意。

次に、 γ の最尤推定量 $\hat{\gamma}_n$ を求める。

X_1, \dots, X_n は互いに独立で、指数分布 $f(x; \gamma)$ に従うので、尤度関数 $l(\gamma)$ は

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \gamma) \\ &= \prod_{i=1}^n \gamma e^{-\gamma x_i} \\ &= \gamma^n e^{-\gamma \sum x_i} \end{aligned}$$

対数尤度関数は

$$\log l(\gamma) = n \log(\gamma) - \gamma \sum_{i=1}^n x_i$$

$\log l(\gamma)$ を最大にするような γ を求める。

$$\frac{d \log l(\gamma)}{d\gamma} = \frac{n}{\gamma} - \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

を解いて、 x_i を X_i で置き換えて、 γ の最尤推定量 $\hat{\gamma}_n$ は、

$$\hat{\gamma}_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}$$

となる。

したがって、 $n \rightarrow \infty$ のとき、近似的に、

$$\frac{\hat{\gamma}_n - \gamma}{\sigma(\hat{\gamma}_n)/\sqrt{n}} = \frac{\hat{\gamma}_n - \gamma}{\hat{\gamma}_n/\sqrt{n}}$$

が成り立つ。

よって、 $H_0: \gamma = \gamma_0$ と $H_1: \gamma \neq \gamma_0$ について、 $\hat{\gamma}_n$ を実現値で置き換えて、

$$\left| \frac{\hat{\gamma}_n - \gamma_0}{\hat{\gamma}_n / \sqrt{n}} \right| > z_{\alpha/2} \text{ のとき, } H_0 \text{ を棄却する。}$$

ただし、 γ の最尤推定値 $\hat{\gamma}_n$ は、

$$\hat{\gamma}_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}$$

となる。

12.2 尤度比検定

仮説検定：母集団の分布 $f(x; \theta)$ が与えられているときに、母数 $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ についての仮説 $\theta_1 = \theta_1^*$ が正しいかどうかを、標本 (X_1, X_2, \dots, X_n) の実現値 (x_1, x_2, \dots, x_n) から判断する。

θ_1 : $1 \times k_1$ ベクトル

θ_2 : $1 \times k_2$ ベクトル

$\theta = (\theta_1, \theta_2)$: $1 \times (k_1 + k_2)$ ベクトル

帰無仮説 $H_0: \theta_1 = \theta_1^* \implies$ 制約の数は k_1 個

尤度関数

$$l(\theta_1, \theta_2) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta_1, \theta_2)$$

$(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ を (θ_1, θ_2) の最尤推定量とする。

すなわち、 $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ は、

$$\frac{\partial l(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} = 0, \quad \frac{\partial l(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} = 0$$

の連立方程式を、 (θ_1, θ_2) について解いた解である。

\implies 制約なし最尤推定量

$\hat{\theta}_2$ を、帰無仮説 $H_0: \theta_1 = \theta_1^*$ が正しいという条件のもとで、 θ_2 の最尤推定量とする。

すなわち、 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ は、

$$\frac{\partial l(\theta_1^*, \theta_2)}{\partial \theta_2} = 0$$

を、 θ_2 について解いた解である。 \implies 制約付き最尤推定量 ($\theta_1 = \theta_1^*$ という制約)

$$\text{尤度比: } \lambda = \frac{l(\theta_1^*, \hat{\theta}_2)}{l(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)}$$

n が大きいとき、近似的に、

$$-2 \log(\lambda) \sim \chi^2(k_1)$$

となる。「 $k_1 =$ 制約の数」に注意。

$-2 \log(\lambda) > \chi_{\alpha}^2(k_1)$ のとき、有意水準 α で、帰無仮説 $H_0: \theta_1 = \theta_1^*$ を棄却する。

$-2 \log(\lambda)$ がゼロに近ければ、帰無仮説を採択する。

$\implies (\theta_1^*, \hat{\theta}_2)$ が $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ に近い値であれば、 $-2 \log(\lambda)$ はゼロに近くなる。

母数の推定量 $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ の分布が求めることが出来ない場合に、尤度比検定は有効である。

例題：指数分布から生成された n 個の互いに独立な確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n を考える。指数分布は、

$$f(x) = \gamma e^{-\gamma x} \quad x > 0$$

である。

帰無仮説 $H_0: \gamma = \gamma_0$ を、尤度比検定によって、検定する。

尤度比

$$\lambda = \frac{l(\gamma_0)}{\max_{\gamma} l(\gamma)} = \frac{l(\gamma_0)}{l(\hat{\gamma})}$$

について、制約の数は 1 なので、

$$-2 \log \lambda \longrightarrow \chi^2(1)$$

となる。

X_1, \dots, X_n は互いに独立で、指数分布 $f(x)$ に従うので、尤度関数 $l(\gamma)$ は

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \prod_{i=1}^n f(x_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \gamma e^{-\gamma x_i} \\ &= \gamma^n e^{-\gamma \sum x_i} \end{aligned}$$

分子について：

$$l(\gamma_0) = \gamma_0^n e^{-\gamma_0 \sum X_i}$$

分母について：
対数尤度関数は

$$\log l(\gamma) = n \log(\gamma) - \gamma \sum_{i=1}^n x_i$$

$\log l(\gamma)$ を最大にするような γ を求める。

$$\frac{d \log l(\gamma)}{d\gamma} = \frac{n}{\gamma} - \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

を解いて、 x_i を X_i で置き換えて、 γ の最尤推定量 $\hat{\gamma}$ は

$$\hat{\gamma} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}$$

となる。

$$l(\hat{\gamma}) = \hat{\gamma}^n e^{-n}$$

したがって、尤度比

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{l(\gamma_0)}{l(\hat{\gamma})} \\ &= \frac{\gamma_0^n e^{-\gamma_0 \sum X_i}}{\hat{\gamma}^n e^{-n}} \end{aligned}$$

を得る。

よって、近似的に、

$$-2 \log \lambda \sim \chi^2(1)$$

となる。

$-2 \log \lambda > \chi_{\alpha}^2(1)$ のとき、有意水準 α で、帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ を棄却する。 $\chi_{\alpha}^2(1)$ は自由度 1 のカイ二乗分布の $100 \times \alpha$ % 点とする。

例題： X_1, X_2, \dots, X_n の n 個の確率変数は、それぞれ独立に、平均 μ 、分散 σ^2 の分布をするものとする。

平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布の密度関数は

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

で与えられる。

帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ を、尤度比検定によって、検定する。

尤度比

$$\lambda = \frac{\max_{\sigma^2} l(\mu_0, \sigma^2)}{\max_{\mu, \sigma^2} l(\mu, \sigma^2)} = \frac{l(\mu_0, \tilde{\sigma}^2)}{l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)}$$

について、制約の数は 1 なので、

$$-2 \log \lambda \rightarrow \chi^2(1)$$

となる。

ここで、 $l(\mu, \sigma^2)$ は、

$$\begin{aligned} l(\mu, \sigma^2) &= f(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu, \sigma^2) \\ &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \mu, \sigma^2) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu)^2\right) \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right) \end{aligned}$$

であり、 $\log l(\mu, \sigma^2)$ は、

$$\begin{aligned} \log l(\mu, \sigma^2) &= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \end{aligned}$$

である。

分子について：

$\mu = \mu_0$ のもとで、 $\log l(\mu_0, \sigma^2)$ を σ^2 について最大化する。

$$\frac{\partial \log l(\mu_0, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 = 0$$

この解が $\tilde{\sigma}^2$ である。したがって、

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2$$

を得る。よって、 $l(\mu_0, \tilde{\sigma}^2)$ は、

$$\begin{aligned} l(\mu_0, \tilde{\sigma}^2) &= (2\pi\tilde{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\tilde{\sigma}^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2\right) \\ &= (2\pi\tilde{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{n}{2}\right) \end{aligned}$$

となる。

分母について：

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2$$

を得る。よって、 $l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ は、

$$l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$$

$$= (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2\right)$$

$$= (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{n}{2}\right)$$

となる。

したがって、

$$\lambda = \frac{\max_{\sigma^2} l(\mu_0, \sigma^2)}{\max_{\mu, \sigma^2} l(\mu, \sigma^2)}$$

$$= \frac{l(\mu_0, \tilde{\sigma}^2)}{l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)}$$

$$= \frac{(2\pi\tilde{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{n}{2}\right)}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{n}{2}\right)}$$

$$= \left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2}\right)^{-n/2}$$

よって、近似的に、

$$-2 \log \lambda = n(\log \tilde{\sigma}^2 - \log \hat{\sigma}^2) \sim \chi^2(1)$$

となる。

$-2 \log \lambda > \chi_{\alpha}^2(1)$ のとき、有意水準 α で、帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ を棄却する。 $\chi_{\alpha}^2(1)$ は自由度 1 のカイ二乗分布の $100 \times \alpha$ % 点とする。

練習問題と解答 (6 章 ~ 12 章)

1 平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布の密度関数は

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

与えられる。 X_1, X_2, \dots, X_n は互いに独立で、しかも、それぞれは平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布に従うものとする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) 平均 μ 、分散 σ^2 の最尤推定量を求めよ。
- (2) σ^2 の最尤推定量は不偏推定量であるかどうかを調べよ。もし、 σ^2 の最尤推定量が不偏推定量でないときは、不偏推定量を求めよ (最尤推定量をもとにして考えればよい)。
- (3) 帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ を、尤度比検定によって、検定したい。どのようにすればよいかを説明せよ。

[解答]

- (1) 平均 μ 、分散 σ^2 の最尤推定量を求める。

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu, \sigma^2)$$

$$= \prod_{i=1}^n f(x_i; \mu, \sigma^2)$$

$$= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu)^2\right)$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right)$$

$$= l(\mu, \sigma^2)$$

対数をとる。(最大化しやすくなる場合が多い)

$$\log l(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2)$$

$$- \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

対数尤度関数 $\log l(\mu, \sigma^2)$ を μ と σ^2 について微分して、ゼロと置く。

$$\frac{\partial \log l(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial \log l(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

$$= 0$$

この 2 つの連立方程式を解く。

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

μ, σ^2 の最尤推定量は,

$$\bar{X}, \quad S^{**2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

となる。

- (2) σ^2 の最尤推定量 S^{**2} は不偏推定量であるかどうかを調べる。

$$\begin{aligned} E(S^{**2}) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) \\ &= \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) \\ &= \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n ((X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu))^2\right) \\ &= \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n ((X_i - \mu)^2 - 2(X_i - \mu)(\bar{X} - \mu) + (\bar{X} - \mu)^2)\right) \\ &= \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu) \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) + n(\bar{X} - \mu)^2\right) \\ &= \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - 2n(\bar{X} - \mu)^2 + n(\bar{X} - \mu)^2\right) \\ &= \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2\right) \\ &= \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2\right) - \frac{1}{n} E(n(\bar{X} - \mu)^2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E((X_i - \mu)^2) - E((\bar{X} - \mu)^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V(X_i) - V(\bar{X}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} \\ &= \sigma^2 - \frac{1}{n} \sigma^2 \\ &= \frac{n-1}{n} \sigma^2 \\ &\neq \sigma^2 \end{aligned}$$

なので, S^{**2} は σ^2 の不偏推定量ではない。

S^{**2} をもとにして, σ^2 の不偏推定量を求める。

$$E(S^{**2}) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

なので, 両辺に $\frac{n}{n-1}$ をかけて,

$$\frac{n}{n-1} E(S^{**2}) = \sigma^2$$

を得る。

よって,

$$\frac{n}{n-1} S^{**2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = S^2$$

が σ^2 の不偏推定量となる。

- (3) 帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ を, 尤度比検定によって, 検定する。

尤度比

$$\lambda = \frac{\max_{\sigma^2} l(\mu_0, \sigma^2)}{\max_{\mu, \sigma^2} l(\mu, \sigma^2)} = \frac{l(\mu_0, \tilde{\sigma}^2)}{l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)}$$

について, 制約の数は 1 なので,

$$-2 \log \lambda \rightarrow \chi^2(1)$$

となる。

ここで, $l(\mu, \sigma^2)$ は,

$$l(\mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right)$$

であり, $\log l(\mu, \sigma^2)$ は,

$$\begin{aligned} \log l(\mu, \sigma^2) &= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \end{aligned}$$

である。

分子について:

$\mu = \mu_0$ のもとで, $\log l(\mu_0, \sigma^2)$ を σ^2 について最大化する。

$$\frac{\partial \log l(\mu_0, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 = 0$$

この解が $\tilde{\sigma}^2$ である。したがって,

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2$$

を得る。よって, $l(\mu_0, \tilde{\sigma}^2)$ は,

$$\begin{aligned} l(\mu_0, \tilde{\sigma}^2) &= (2\pi\tilde{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\tilde{\sigma}^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2\right) \\ &= (2\pi\tilde{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{n}{2}\right) \end{aligned}$$

となる。

分母について:

問 (1) より,

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2 \end{aligned}$$

を得る。よって, $l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ は,

$$\begin{aligned} l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) &= (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2\right) \\ &= (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{n}{2}\right) \end{aligned}$$

となる。

したがって,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\max_{\sigma^2} l(\mu_0, \sigma^2)}{\max_{\mu, \sigma^2} l(\mu, \sigma^2)} \\ &= \frac{l(\mu_0, \tilde{\sigma}^2)}{l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)} \\ &= \frac{(2\pi\tilde{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{n}{2}\right)}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{n}{2}\right)} \\ &= \left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2}\right)^{-n/2} \end{aligned}$$

よって, 近似的に,

$$-2 \log \lambda = n(\log \tilde{\sigma}^2 - \log \hat{\sigma}^2) \sim \chi^2(1)$$

となる。

$-2 \log \lambda > \chi_\alpha^2(1)$ のとき, 有意水準 α で, 帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ を棄却する。 $\chi_\alpha^2(1)$ は自由度 1 のカイ二乗分布の $100 \times \alpha$ % 点とする。

2 次の問に答えよ。

- (1) 離散型確率変数 X がベルヌイ分布に従うとき, その確率関数は次の式で表される。

$$f(x) = p^x(1-p)^{1-x} \quad x = 0, 1$$

このベルヌイ分布から抽出された大きさ n の無作為標本を X_1, X_2, \dots, X_n とするとき, p の最尤推定量を求めなさい。

- (2) Y を二項分布 $f(y)$ に従う確率変数とする。このとき, $\frac{Y}{n}$ は, n が大きくなると, p に近づくことを証明せよ。ただし, 二項分布は

$$f(y) = {}_n C_y p^y (1-p)^{n-y} \quad y = 0, 1, 2, \dots, n$$

で与えられる。

- (3) 問 (2) の確率変数 Y について, 確率変数 $Z_n \equiv \frac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ を定義する。このとき, n が大きくなるにつれて, Z_n は標準正規分布に近づくことを証明せよ。

(4) 連続型確率変数 X の密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

とする。 $\frac{X}{n}$ は、 $n \rightarrow \infty$ のとき、1 に近づくことを示せ。ただし、 $\Gamma(a)$ はガンマ関数であり、

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

と定義される。

[解答]

(1) 離散型確率変数 X がベルヌイ分布に従うとき、その確率関数は次の式で表される。

$$f(x; p) = p^x (1-p)^{1-x} \quad x = 0, 1$$

このベルヌイ分布から抽出された大きさ n の無作為標本を X_1, X_2, \dots, X_n とするとき、 p の最尤推定量を求める。

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, \dots, x_n; p) \\ &= \prod_{i=1}^n f(x_i; p) \\ &= \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} \\ &= p^{\sum_i x_i} (1-p)^{n-\sum_i x_i} \\ &= l(p) \end{aligned}$$

対数をとる。

$$\begin{aligned} & \log l(p) \\ &= \left(\sum_i x_i \right) \log(p) + \left(n - \sum_i x_i \right) \log(1-p) \end{aligned}$$

対数尤度関数 $\log l(p)$ を p について微分して、ゼロと置く。

$$\begin{aligned} \frac{d \log l(p)}{dp} &= \frac{\sum_i x_i}{p} - \frac{n - \sum_i x_i}{1-p} \\ &= \frac{\sum_i x_i - np}{p(1-p)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

この方程式を解く。

$$p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

p の最尤推定量は、

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$$

となる。

(2) Y を二項分布 $f(y)$ に従う確率変数とすると、 $\frac{Y}{n}$ は、 n が大きくなると、 p に近づくことを証明する。

Y の平均、分散は、

$$E(Y) = np, \quad V(Y) = np(1-p)$$

なので、

$$\begin{aligned} E\left(\frac{Y}{n}\right) &= \frac{1}{n} E(Y) = p \\ V\left(\frac{Y}{n}\right) &= \frac{1}{n^2} V(Y) = \frac{p(1-p)}{n} \end{aligned}$$

となる。

チェビシェフの不等式：

確率変数 X と $g(x) \geq 0$ について、

$$P(g(X) \geq k) \leq \frac{E(g(X))}{k}$$

となる。 $k > 0$ とする。

ここで、 $g(X) = (X - E(X))^2$ 、 $k = \epsilon^2$ とすると、

$$P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$$

を得る。 $\epsilon > 0$ とする。

X を $\frac{Y}{n}$ に置き換えて、そのままチェビシェフの不等式を当てはめると、

$$P\left(\left|\frac{Y}{n} - E\left(\frac{Y}{n}\right)\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{V\left(\frac{Y}{n}\right)}{\epsilon^2}$$

すなわち、 $n \rightarrow \infty$ のとき、

$$P\left(\left|\frac{Y}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \rightarrow 0$$

となる。したがって、

$$\frac{Y}{n} \rightarrow p$$

を得る。

- (3) n 個の無作為標本 X_1, X_2, \dots, X_n はそれぞれ独立に、同一のベルヌイ分布に従うものとする。ただし、 $P(X_i = x) = p^x(1-p)^{1-x}$, $x = 0, 1$ とする。

$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ を定義すると、 Y は二項分布に従うので、 $\frac{Y}{n}$ は標本平均とみなすことができる。

すなわち、
$$\frac{Y}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

よって、 $E(\frac{Y}{n}) = p$, $V(\frac{Y}{n}) = p(1-p)/n$ を用いて、中心極限定理により、 $n \rightarrow \infty$ のとき、

$$\frac{\frac{Y}{n} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \rightarrow N(0, 1)$$

を得る。

$$Z_n \equiv \frac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\frac{Y}{n} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$$

なので、

$$Z_n \rightarrow N(0, 1)$$

を得る。

- (4) $X \sim \chi^2(n)$ のとき、

$E(X) = n$, $V(X) = 2n$ となるので、

$E(\frac{X}{n}) = 1$, $V(\frac{X}{n}) = \frac{2}{n}$ となる。

チェビシェフの不等式を当てはめる。

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - E\left(\frac{X}{n}\right)\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{V\left(\frac{X}{n}\right)}{\epsilon^2}$$

$\epsilon > 0$ とする。すなわち、 $n \rightarrow \infty$ のとき、

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - 1\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{2}{n\epsilon^2} \rightarrow 0$$

となる。したがって、

$$\frac{X}{n} \rightarrow 1$$

を得る。

3 指数分布から生成された n 個の互いに独立な確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n を考える。ただし、指数分布とは次の分布である。

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x > 0$$

で与えられる。このとき、次の問に答えよ。

- (1) λ 最尤推定量を $\hat{\lambda}$ とするとき、 $\hat{\lambda}$ を求めよ。
 (2) n が大きいとき、 $\hat{\lambda}$ の平均、分散を求めよ。

[解答]

- (1) X_1, \dots, X_n は互いに独立で、指数分布 $f(x)$ に従うので、尤度関数 $l(\lambda)$ は

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \prod_{i=1}^n f(x_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} \\ &= \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i} \end{aligned}$$

対数尤度関数は

$$\log l(\lambda) = n \log(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

$\log l(\lambda)$ を最大にするような λ を求める。

$$\frac{d \log l(\lambda)}{d \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

を解いて、 x_i を X_i で置き換えて、 λ の最尤推定量 $\hat{\lambda}$ は

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}$$

となる。

- (2) n 個の無作為標本 X_1, X_2, \dots, X_n

X_i の密度関数 $f(X_i; \lambda)$

母数 λ の最尤推定量 $\hat{\lambda}_n$ について、 $n \rightarrow \infty$ のとき、

$$\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda) \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

となる。ただし,

$$\sigma^2 = \sigma^2(\lambda) = \frac{1}{E \left[\left(\frac{d \log f(X; \lambda)}{d\lambda} \right)^2 \right]}$$

とする。

まず, $\sigma^2 = \sigma^2(\lambda)$ を求める。

$$\begin{aligned} & E \left[\left(\frac{d \log f(X; \lambda)}{d\lambda} \right)^2 \right] \\ &= E \left[\left(\frac{1}{\lambda} - X \right)^2 \right] \\ &= E \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda} X + X^2 \right) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda} E(X) + E(X^2) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

$E(X), E(X^2)$ は

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$$

となる。

したがって,

$$\sigma^2 = \sigma^2(\lambda) = \frac{1}{E \left[\left(\frac{d \log f(X; \lambda)}{d\lambda} \right)^2 \right]} = \lambda^2$$

よって, n が大きいとき,

$$\hat{\lambda}_n \sim N \left(\lambda, \frac{\lambda^2}{n} \right)$$

と近似して用いる。

4 X_1, X_2, \dots, X_n の n 個の確率変数は, それぞれ独立に, 平均 μ , 分散 σ^2 の分布をするものとする。次のような 2 つの μ の推定量 \bar{X}, \tilde{X} を考える。

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \tilde{X} = \frac{1}{2}(X_1 + X_n)$$

このとき, 次の問に答えよ。

(1) \bar{X}, \tilde{X} は不偏性を持つかどうかを調べよ。

(2) \bar{X}, \tilde{X} のどちらが有効かを調べよ。

(3) \bar{X}, \tilde{X} の一致性について調べよ。

[解答]

(1) \bar{X}, \tilde{X} は不偏性を持つかどうかを調べる。

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= E \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) \\ &= \frac{1}{n} E \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu \\ &= \mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\tilde{X}) &= \frac{1}{2} (E(X_1) + E(X_n)) \\ &= \frac{1}{2} (\mu + \mu) \\ &= \mu \end{aligned}$$

よって, 両方とも μ の不偏推定量である。

(2) \bar{X}, \tilde{X} のどちらが有効かを調べる。

$$\begin{aligned} V(\bar{X}) &= V \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) \\ &= \frac{1}{n^2} V \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(\tilde{X}) &= \frac{1}{4} (V(X_1) + V(X_n)) \\ &= \frac{1}{4} (\sigma^2 + \sigma^2) \\ &= \frac{\sigma^2}{2} \end{aligned}$$

なので, $n > 2$ のとき, $V(\bar{X}) < V(\tilde{X})$ となり, \bar{X} が \tilde{X} より有効となる。

(3) \bar{X}, \tilde{X} の一貫性について調べる。

チェビシエフの不等式を当てはめる。 \bar{X} について、

$$P(|\bar{X} - E(\bar{X})| \geq \epsilon) \leq \frac{V(\bar{X})}{\epsilon^2}$$

$\epsilon > 0$ とする。すなわち、 $n \rightarrow \infty$ のとき、

$$P(|\bar{X} - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \rightarrow 0$$

となる。したがって、

$$\bar{X} \rightarrow \mu$$

を得る。

一方、 \tilde{X} について、

$$P(|\tilde{X} - E(\tilde{X})| \geq \epsilon) \leq \frac{V(\tilde{X})}{\epsilon^2}$$

$\epsilon > 0$ とする。すなわち、 $n \rightarrow \infty$ のとき、

$$P(|\tilde{X} - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{2\epsilon^2} > 0$$

となる。

\bar{X} は μ の一致推定量であるが、 \tilde{X} は一貫性はない。

5 正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ から 9 個の無作為標本

21 23 32 20 36 27 26 28 30

が得られた。このとき、次の各問に答えなさい。

- (1) μ と σ^2 の不偏推定値を求めよ。
- (2) 信頼係数 0.90 および 0.95 の μ の信頼区間を求めよ。
- (3) 帰無仮説 $H_0: \mu = 24$ を対立仮説 $H_1: \mu > 24$ に対して有意水準 0.10 および 0.05 で検定しなさい。

[解答]

(1) μ と σ^2 の不偏推定量 \bar{X}, S^2 は

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

で、不偏推定値は

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

である。

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ &= \frac{1}{9} (21 + 23 + 32 + 20 \\ &\quad + 36 + 27 + 26 + 28 + 30) \\ &= 27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{8} \left((21 - 27)^2 + (23 - 27)^2 + (32 - 27)^2 \right. \\ &\quad \left. + (20 - 27)^2 + (36 - 27)^2 + (27 - 27)^2 \right. \\ &\quad \left. + (26 - 27)^2 + (28 - 27)^2 + (30 - 27)^2 \right) \\ &= \frac{1}{8} (36 + 16 + 25 + 49 \\ &\quad + 81 + 0 + 1 + 1 + 9) \\ &= 27.25 \end{aligned}$$

(2) μ の信頼区間を求める。

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1),$$

を利用する。

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}\right| < t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1 - \alpha$$

$t_{\alpha/2}(n-1)$ は $100 \times \frac{\alpha}{2} \%$ 点で、確率 α と自由度 $n-1$ が与えられると、 t 分布表から得られる。

したがって、

$$\begin{aligned} P\left(\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}\right) \\ = 1 - \alpha \end{aligned}$$

\bar{X}, S^2 を \bar{x}, s^2 で置き換えて、

信頼係数 $1 - \alpha$ の μ の信頼区間： \implies

$$\left(\bar{x} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

さらに、 $\bar{x} = 27, s^2 = 27.25, n = 9, t_{0.05}(8) = 1.860, t_{0.025}(8) = 2.306$ なので、

信頼係数 0.90 の μ の信頼区間は、

$$(27 - 1.860\sqrt{\frac{27.25}{9}}, 27 + 1.860\sqrt{\frac{27.25}{9}})$$

$$= (23.76, 30.24)$$

となり, 信頼係数 0.95 の μ の信頼区間は,

$$(27 - 2.306\sqrt{\frac{27.25}{9}}, 27 + 2.306\sqrt{\frac{27.25}{9}})$$

$$= (22.99, 31.01)$$

となる。

- (3) 帰無仮説 $H_0: \mu = 24$ を対立仮説 $H_1: \mu > 24$ に対して有意水準 0.10 および 0.05 で検定する。

\bar{X} の分布は, $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ なので, 帰無仮説

$H_0: \mu = \mu_0$ が正しいもとで, $\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ となる (μ を μ_0 で置き換える)。このとき, 検定統計量 $\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ 。検定統計量の値 $\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ 。

対立仮説 $H_1: \mu > \mu_0$ (片側検定) について:

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_{\alpha}(n-1)\right) = \alpha \text{ なので,}$$

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_{\alpha}(n-1) \text{ のとき,}$$

有意水準 α で $H_0: \mu = \mu_0$ を棄却する。

$$\bar{x} = 27, s^2 = 27.25, \mu_0 = 24, n = 9, t_{0.10}(8) = 1.397,$$

$$t_{0.05}(8) = 1.860 \text{ を当てはめると,}$$

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{27 - 24}{\sqrt{27.25/9}} = 1.724 > t_{0.10}(8) = 1.397 \text{ となり, 有意水準 } 0.10 \text{ で } H_0: \mu = 24 \text{ を棄却する。}$$

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{27 - 24}{\sqrt{27.25/9}} = 1.724 < t_{0.05}(8) = 1.860 \text{ となり, 有意水準 } 0.05 \text{ で } H_0: \mu = 24 \text{ を棄却しない。}$$

6 平均 μ , 分散が既知で $\sigma^2 = 2^2$ である正規母集団から 16 個の無作為標本 X_1, X_2, \dots, X_{16} を抽出し, その標本平均を計算したところ, $\bar{x} = 36$ であった。このとき, 次の各問に答えよ。

- (1) 平均 μ の信頼係数 0.95 の信頼区間を求めよ。
- (2) 帰無仮説 $H_0: \mu = 35$ を対立仮説 $H_1: \mu = 36.5$ に対して, 有意水準 0.05 で検定せよ。
- (3) 問 (2) で行った検定の検出力を求めよ。

[解答]

- (1) 平均 μ の信頼係数 0.95 の信頼区間を求める。

\bar{X} の分布は

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1),$$

となる。

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$z_{\alpha/2}$ は $100 \times \frac{\alpha}{2}$ % 点で, 確率 α が与えられると, 正規分布表から得られる。

したがって,

$$P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

\bar{X} を \bar{x} で置き換えて,

信頼係数 $1 - \alpha$ の μ の信頼区間: \Rightarrow

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$\bar{x} = 36, \sigma^2 = 2^2, n = 16, z_{0.025} = 1.960$ を代入すると,

平均 μ の信頼係数 0.95 の信頼区間は,

$$\left(36 - 1.960 \frac{2}{\sqrt{16}}, 36 + 1.960 \frac{2}{\sqrt{16}}\right) = (35.02, 36.98)$$

となる。

- (2) 帰無仮説 $H_0: \mu = 35$ を対立仮説 $H_1: \mu = 36.5$ に対して, 有意水準 0.05 で検定する。

\bar{X} の分布は, $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ なので, 帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ が正しいもとで,

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \text{ となる } (\mu \text{ を } \mu_0 \text{ で置き換える)。こ}$$

のとき, 検定統計量 $\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 。検定統計量の値 $\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 。

対立仮説 $H_1: \mu > \mu_0$ (片側検定) について:

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{\alpha}\right) = \alpha \text{ なので, } \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{\alpha} \text{ のとき, 有意水準 } \alpha \text{ で帰無仮説 } H_0: \mu = \mu_0 \text{ を棄却する。}$$

$\bar{x} = 36, \sigma^2 = 2^2, n = 16, z_{0.05} = 1.645$ を代入すると,

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{36 - 35}{2/\sqrt{16}} = 2 > z_{\alpha} = 1.645 \text{ なので, 有意水準 } \alpha = 0.05 \text{ で帰無仮説 } H_0: \mu = 35 \text{ を棄却する。}$$

(3) 問 (2) で行った検定の検出力を求める。

検出力とは、対立仮説のもとで、帰無仮説を棄却する確率である。

すなわち、帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ のもとで、帰無仮説を棄却する棄却域は、 $P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha\right) = \alpha$ なので、 $\bar{X} > \mu_0 + z_\alpha \sigma/\sqrt{n}$ となる。

対立仮説 $H_1: \mu = \mu_1$ のもとで、帰無仮説を棄却する確率を求める。

すなわち、対立仮説 $H_1: \mu = \mu_1$ のもとで、

$P\left(\bar{X} > \mu_0 + z_\alpha \sigma/\sqrt{n}\right)$ を求める。

対立仮説 $H_1: \mu = \mu_1$ のもとで、

$\frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ となるので、

$P\left(\frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} + z_\alpha\right)$

となる確率を求めればよい。

$\sigma = 2, n = 16, \mu_0 = 35, \mu_1 = 36.5, z_\alpha = 1.645$ を代入すると、

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{35 - 36.5}{2/\sqrt{16}} + 1.645\right)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} > -1.355\right)$$

$$= 1 - 0.0877 = 0.9123 \text{ を得る。}$$

($z_{0.0885} = 1.35, z_{0.0869} = 1.36$ に注意)

7 X_1, X_2, \dots, X_n は互いに独立で、すべて同一のポアソン分布に従うものとする。ただし、ポアソン分布の確率関数は

$$P(X = x) = f(x; \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

である。

このとき、次の問に答えよ。

- (1) λ の最尤推定量 $\hat{\lambda}$ を求めよ。
- (2) $\hat{\lambda}$ は、 λ の不偏推定量であることを証明せよ。
- (3) $\hat{\lambda}$ は、 λ の有効推定量であることを証明せよ。
- (4) $\hat{\lambda}$ は、 λ の一致推定量であることを証明せよ。

[解答]

(1) λ の最尤推定量 $\hat{\lambda}$ を求める。

ポアソン分布の確率関数は、

$$P(X = x) = f(x; \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

なので、尤度関数は、

$$\begin{aligned} l(\lambda) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} \\ &= \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^n x_i!} \end{aligned}$$

対数尤度関数は、

$$\log l(\lambda) = \log(\lambda) \sum_{i=1}^n x_i - n\lambda - \log\left(\prod_{i=1}^n x_i!\right)$$

となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log l(\lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i - n \\ &= 0 \end{aligned}$$

これを解いて、 λ の最尤推定量 $\hat{\lambda}$ は、

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$$

となる。

(2) $\hat{\lambda}$ は、 λ の不偏推定量であることを証明する。

$$\begin{aligned} E(\hat{\lambda}) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda \\ &= \lambda \end{aligned}$$

(3) $\hat{\lambda}$ は、 λ の有効推定量であることを証明する。

クラメル・ラオの不等式の等号が成り立つことを証明すればよい。

$$\begin{aligned}
 V(\hat{\lambda}) &= V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \lambda \\
 &= \frac{\lambda}{n} \\
 &= \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial \log f(X; \lambda)}{\partial \lambda}\right)^2\right]} \\
 &= \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial (X \log \lambda - \lambda - \log X!)}{\partial \lambda}\right)^2\right]} \\
 &= \frac{1}{nE\left[\left(\frac{X}{\lambda} - 1\right)^2\right]} \\
 &= \frac{\lambda^2}{nE[(X - \lambda)^2]} \\
 &= \frac{\lambda^2}{nV(X)} \\
 &= \frac{\lambda^2}{n\lambda} \\
 &= \frac{\lambda}{n}
 \end{aligned}$$

したがって、

$$V(\hat{\lambda}) = \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial \log f(X; \lambda)}{\partial \lambda}\right)^2\right]}$$

となり、 $V(\hat{\lambda})$ は、クラメル・ラオの下限に一致する。よって、 $\hat{\lambda}$ は有効推定量である。

(4) $\hat{\lambda}$ は、 λ の一致推定量であることを証明する。

$$E(\hat{\lambda}) = \lambda, \quad V(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda}{n}$$

である。チェビシェフの不等式

$$P(|\hat{\lambda} - E(\hat{\lambda})| \geq \epsilon) \leq \frac{V(\hat{\lambda})}{\epsilon^2}$$

に、 $E(\hat{\lambda})$, $V(\hat{\lambda})$ を代入すると、

$$P(|\hat{\lambda} - \lambda| > \epsilon) < \frac{\lambda}{n\epsilon^2} \rightarrow 0$$

が得られる。したがって、一貫性も成り立つ。

8 連続型確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n は互いに独立に同一の正規分布に従うものとする。このとき、以下の間に答えよ。ただし、正規分布の密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

で表される。

- (1) 標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ の分布は、平均 μ 、分散 $\frac{\sigma^2}{n}$ の正規分布に従うことを示せ。
- (2) $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ を定義する。 Z の分布は、平均 0、分散 1 の正規分布に従うことを示せ。
- (3) 標本不偏分散 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ を考える。

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ の分布は自由度 $n-1$ のカイ二乗分布であることが知られている。これを利用して、 S^2 の平均と分散を求めよ。

ただし、自由度 m のカイ二乗分布の密度関数は、

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

として表される。

- (4) S^2 は σ^2 の一致推定量であることを示せ。

[解答]

- (1) 標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ の分布は、平均 μ 、分散 $\frac{\sigma^2}{n}$ の正規分布に従うことを示す。
積率母関数を利用する。

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき, X の積率母関数 $\phi(\theta)$ は,

$$\begin{aligned} & \phi(\theta) \\ & \equiv E(e^{\theta X}) \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f(x) dx \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2 + \theta x} dx \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2(\mu + \sigma^2\theta)x + \mu^2)} dx \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - (\mu + \sigma^2\theta))^2 + (\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)} dx \\ & = e^{\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - (\mu + \sigma^2\theta))^2} dx \\ & = \exp\left(\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\right) \end{aligned}$$

と計算される。積分のところは, $N(\mu + \sigma^2\theta, \sigma^2)$ の確率密度関数に注意

よって, $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき, X_i の積率母関数 $\phi_i(\theta)$ は,

$$\phi_i(\theta) = \exp\left(\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\right)$$

となる。

今, \bar{X} の積率母関数 $\phi_{\bar{X}}(\theta)$ を考える。

$$\begin{aligned} \phi_{\bar{X}}(\theta) & \equiv E(e^{\theta\bar{X}}) \\ & = E(e^{\frac{\theta}{n} \sum_{i=1}^n X_i}) \\ & = E\left(\prod_{i=1}^n e^{\frac{\theta}{n} X_i}\right) \\ & = \prod_{i=1}^n E(e^{\frac{\theta}{n} X_i}) \\ & = \prod_{i=1}^n \phi_i\left(\frac{\theta}{n}\right) \\ & = \prod_{i=1}^n \exp\left(\mu\frac{\theta}{n} + \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{\theta}{n}\right)^2\right) \\ & = \exp\left(\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\theta^2}{n}\right) \\ & = \exp\left(\mu\theta + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}\theta^2\right) \end{aligned}$$

となり, これは, 平均 μ , 分散 σ^2/n の正規分布の積率母関数に一致する。

(2) $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ の分布は, 平均 0, 分散 1 の正規分布に従うことを示す。

\bar{X} の積率母関数 $\phi_{\bar{X}}(\theta)$ は, 問 (1) より,

$$\begin{aligned} \phi_{\bar{X}}(\theta) & \equiv E(e^{\theta\bar{X}}) \\ & = \exp\left(\mu\theta + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}\theta^2\right) \end{aligned}$$

と計算されることを利用する。

Z の積率母関数 $\phi_z(\theta)$ は,

$$\begin{aligned} \phi_z(\theta) & \equiv E(e^{\theta Z}) \\ & = E\left(\exp\left(\theta\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right) \\ & = \exp\left(-\theta\frac{\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) E\left(\exp\left(\frac{\theta}{\sigma/\sqrt{n}}\bar{X}\right)\right) \\ & = \exp\left(-\theta\frac{\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \phi_{\bar{X}}\left(\frac{\theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\ & = \exp\left(-\theta\frac{\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\ & \quad \times \exp\left(\mu\frac{\theta}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{\theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2\right) \\ & = \exp\left(\frac{1}{2}\theta^2\right) \end{aligned}$$

これは, $N(0, 1)$ の積率母関数となっている。

(3) まず, 準備として, 自由度 m のカイ二乗分布の平均と分散を計算する。

自由度 m のカイ二乗分布は,

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad x > 0 \text{ のとき}$$

なので, その積率母関数 $\phi_{\chi^2}(\theta)$ は,

$$\begin{aligned} \phi_{\chi^2}(\theta) & = E(e^{\theta X}) \\ & = \int_0^{\infty} e^{\theta x} \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx \\ & = \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(1-2\theta)x} dx \\ & = \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} \left(\frac{y}{1-2\theta}\right)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} \frac{1}{1-2\theta} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{1-2\theta} \right)^{\frac{m}{2}-1} \frac{1}{1-2\theta} \\
&\times \int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2})} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} dy \\
&= (1-2\theta)^{-\frac{m}{2}}
\end{aligned}$$

となる。

4つ目の等式で、 $y = (1-2\theta)x$ として、置換積分を利用。

$\frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2})} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y}$ は、自由度 m の χ^2 分布となっているので、その積分値は1となる。

積率母関数を微分して、

$$\begin{aligned}
\phi'_{\chi^2}(\theta) &= m(1-2\theta)^{-\frac{m}{2}-1} \\
\phi''_{\chi^2}(\theta) &= m(m+2)(1-2\theta)^{-\frac{m}{2}-2}
\end{aligned}$$

を用いると、

$$\begin{aligned}
E(X) &= \phi'_{\chi^2}(0) = m \\
E(X^2) &= \phi''_{\chi^2}(0) = m(m+2)
\end{aligned}$$

が得られる。

よって、自由度 m の χ^2 分布の平均は m 、分散は、

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
&= m(m+2) - m^2 \\
&= 2m
\end{aligned}$$

となる。

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ なので、これを利用すると、

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) &= n-1 \\
V\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) &= 2(n-1)
\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}
\frac{n-1}{\sigma^2} E(S^2) &= n-1 \\
\left(\frac{n-1}{\sigma^2}\right)^2 V(S^2) &= 2(n-1)
\end{aligned}$$

を利用して、 S^2 の平均と分散は、

$$\begin{aligned}
E(S^2) &= \sigma^2 \\
V(S^2) &= \frac{2\sigma^4}{n-1}
\end{aligned}$$

となる。

(4) S^2 は σ^2 の一致推定量であることを示す。

チェビシェフの不等式を用いる。

$$P(|S^2 - E(S^2)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(S^2)}{\epsilon^2}$$

に、 $E(S^2)$ 、 $V(S^2)$ を代入すると、

$$P(|S^2 - \sigma^2| \geq \epsilon) \leq \frac{2\sigma^4}{(n-1)\epsilon^2} \rightarrow 0$$

が得られる。したがって、一貫性も成り立つ。