1　系列相関：DW について

1.1　回帰モデルの仮定

回帰モデル：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i, \quad u_i \sim N(0, \sigma^2),$$

ただし，

Y_i： 被説明変数，従属変数

X_i： 説明変数，独立変数

α, β, σ^2： 未知母数 (未知パラメータ)

$\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$： 推定量 (特に，最小二乗推定量)

仮定：

1. X_i は確率変数でないと仮定する (固定された値)。
2. すべての i について，$\mathrm{E}(u_i) = 0$ とする。
3. すべての i について，$\mathrm{V}(u_i) = \sigma^2$ とする。($\mathrm{V}(u_i) = \mathrm{E}(u_i^2) = \sigma^2$ に注意)
4. すべての $i \neq j$ について，$\mathrm{Cov}(u_i, u_j) = 0$ とする。($\mathrm{Cov}(u_i, u_j) = \mathrm{E}(u_i u_j) = 0$ に注意)
5. すべての i について，$u_i \sim N(0, \sigma^2)$ とする。
6. $n \longrightarrow \infty$ のとき，$\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 \longrightarrow \infty$ とする。

攪乱項 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ はそれぞれ独立に平均ゼロ，分散 σ^2 の正規分布する。

誤差項 (攪乱項) の経済学的意味

1. 経済理論自身が不完全： X 以外にも他の説明変数が必要であるにもかかわらず，それを誤って除いている可能性がある。
2. モデルの定式化が不完全： Y と X との間の線形関係が誤りかもしれない。
3. 理論モデルとデータとの対応： 理論モデルで考えられる変数と実際に用いたデータが適当でないかもしれない。例： 所得のデータについては国民総生産，国民所得，可処分所得，労働所得 ⋯，金利では公定歩合，国債利回り，定期預金金利，全国銀行平均約定金利 ⋯
4. 測定上の誤差： 経済データは一般的に推計されているため完全ではない。誤差を含む。

1.2　DW について

最小自乗法の仮定の一つに，「攪乱項 $u_1, u_2, \cdots, u_T$ はそれぞれ独立に分布する」というものがあった。ダービン・ワトソン比 (DW) とは，誤差項の系列相関，すなわち，u_t と u_{t-1} との間の相関の有無を検定するために考案された。
$\Longrightarrow$ 時系列データのときのみ有効
$u_1, u_2, \cdots, u_T$ の系列について，それぞれの符号が，＋＋＋- - - -＋＋- - -＋＋のように，プラスが連続で続いた後で，マイナスが連続で続くというような場合，$u_1, u_2, \cdots, u_T$ は正の系列相関があると言う。また，＋-＋-＋-＋-＋のように交互にプラス，マイナスになる場合，$u_1, u_2, \cdots, u_T$ 負の系列相関があると言う。
特徴： $u_1, u_2, \cdots, u_t$ から u_{t+1} の符号が予想できる。$\Longrightarrow$「$u_1, u_2, \cdots, u_T$ はそれぞれ独立に分布する」という仮定に反する。
すなわち，ダービン・ワトソン比とは，回帰式が

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha + \beta x_t + u_t, \\ u_t &= \rho u_{t-1} + \epsilon_t, \end{aligned}$$

のときに，H_0： $\rho = 0$, H_1： $\rho \neq 0$ の検定である。ただし，$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_T$ は互いに独立とする。
ダービン・ワトソン比の定義は次の通りである。

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^T (\widehat{u}_t - \widehat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T \widehat{u}_t^2}$$

DW は近似的に，次のように表される。

$$\begin{aligned} DW &= \frac{\sum_{t=2}^T (\widehat{u}_t - \widehat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T \widehat{u}_t^2} \\ &= \frac{\sum_{t=2}^T \widehat{u}_t^2 - 2\sum_{t=2}^T \widehat{u}_t \widehat{u}_{t-1} \sum_{t=2}^T \widehat{u}_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^T \widehat{u}_t^2} \\ &= \frac{2\sum_{t=1}^T \widehat{u}_t^2 - (\widehat{u}_1^2 + \widehat{u}_T^2)}{\sum_{t=1}^T \widehat{u}_t^2} - 2\frac{\sum_{t=2}^T \widehat{u}_t \widehat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^T \widehat{u}_t^2} \\ &\approx 2(1 - \widehat{\rho}), \end{aligned}$$

以下の 2 つの近似が用いられる。

$$\frac{\widehat{u}_1^2 + \widehat{u}_T^2}{\sum_{t=1}^T \widehat{u}_t^2} \approx 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{t=2}^T \widehat{u}_t \widehat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^T \widehat{u}_t^2} &= \frac{\sum_{t=2}^T \widehat{u}_t \widehat{u}_{t-1}}{\sum_{t=2}^T \widehat{u}_{t-1}^2 + \widehat{u}_T^2} \\ &\approx \frac{\sum_{t=2}^T \widehat{u}_t \widehat{u}_{t-1}}{\sum_{t=2}^T \widehat{u}_{t-1}^2} = \widehat{\rho}, \end{aligned}$$

すなわち，$\widehat{\rho}$ は $\widehat{u}_t$ と $\widehat{u}_{t-1}$ の回帰係数である。$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$ において，u_t, u_{t-1} の代わりに $\widehat{u}_t, \widehat{u}_{t-1}$ に置き換えて，ρ の推定値 $\widehat{\rho}$ を求める。

1. DW の値が 2 前後のとき，系列相関なし ($\widehat{\rho} = 0$ のとき，$DW \approx 0$)。

2. DW が 2 より十分に小さいとき，正の系列相関と判定される。

3. DW が 2 より十分に大きいとき，負の系列相関と判定される。

正確な判定には，データ数 T とパラメータ数 k に依存する。表 1 と表 2 を参照せよ。
表 1 と表 2 で，k' は定数項を除くパラメータ数を表すものとする。

図 4： 正の系列相関

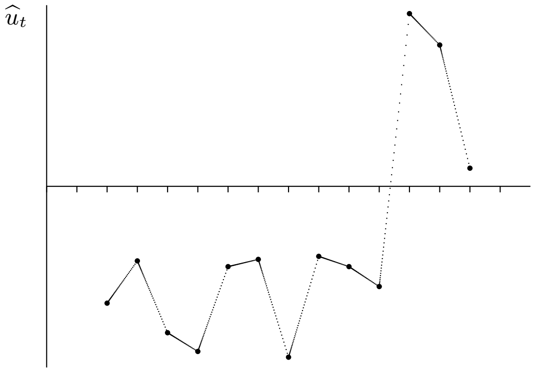
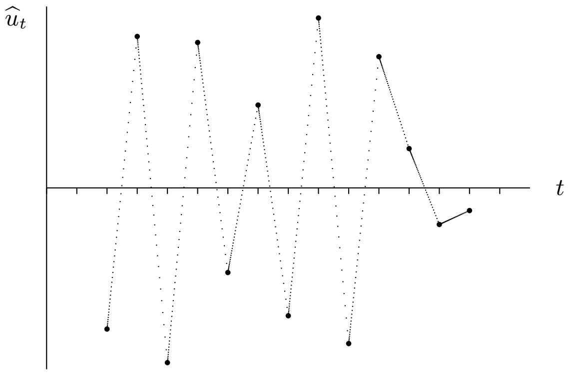


図 5： 負の系列相関



1.3 系列相関のもとで回帰式の推定

回帰式が

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

$$u_i = \rho u_{i-1} + \epsilon_i,$$

のときの推定を考える。ただし，$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ は互いに独立とする。
u_i を消去すると，

$$(Y_i - \rho Y_{i-1}) = \alpha(1-\rho) + \beta(X_i - \rho X_{i-1}) + \epsilon_i,$$

表 1: ダービン・ワトソン統計量の 5 % 点の上限と下限

(1) $k' = 1$

	A		B		C		D		E	
T	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限
	0	dl	dl	du	du	$4-du$	$4-du$	$4-dl$	$4-dl$	4
15	0	1.08	1.08	1.36	1.36	2.64	2.64	2.92	2.92	4
20	0	1.20	1.20	1.41	1.41	2.59	2.59	2.80	2.80	4
25	0	1.29	1.29	1.45	1.45	2.55	2.55	2.71	2.71	4
30	0	1.35	1.35	1.49	1.49	2.51	2.51	2.65	2.65	4

(2) $k' = 2$

	A		B		C		D		E	
T	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限
	0	dl	dl	du	du	$4-du$	$4-du$	$4-dl$	$4-dl$	4
15	0	0.95	0.95	1.54	1.54	2.46	2.46	3.05	3.05	4
20	0	1.10	1.10	1.54	1.54	2.46	2.46	2.90	2.90	4
25	0	1.21	1.21	1.55	1.55	2.45	2.45	2.79	2.79	4
30	0	1.28	1.28	1.57	1.57	2.43	2.43	2.72	2.72	4

(3) $k' = 3$

	A		B		C		D		E	
T	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限
	0	dl	dl	du	du	$4-du$	$4-du$	$4-dl$	$4-dl$	4
15	0	0.82	0.82	1.75	1.75	2.25	2.25	2.25	3.18	4
20	0	1.00	1.00	1.68	1.68	2.32	2.32	2.32	3.00	4
25	0	1.12	1.12	1.66	1.66	2.34	2.34	2.34	2.88	4
30	0	1.21	1.21	1.65	1.65	2.35	2.35	2.35	2.79	4

(4) $k' = 4$

	A		B		C		D		E	
T	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限
	0	dl	dl	du	du	$4-du$	$4-du$	$4-dl$	$4-dl$	4
15	0	0.69	0.69	1.97	1.97	2.03	2.03	3.31	3.31	4
20	0	0.90	0.90	1.83	1.83	2.17	2.17	3.10	3.10	4
25	0	1.04	1.04	1.77	1.77	2.23	2.23	2.96	2.96	4
30	0	1.14	1.14	1.74	1.74	2.26	2.26	2.86	2.86	4

(5) $k' = 5$

	A		B		C		D		E	
T	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限
	0	dl	dl	du	du	$4-du$	$4-du$	$4-dl$	$4-dl$	4
15	0	0.56	0.56	2.21	—	—	2.21	3.44	3.44	4
20	0	0.79	0.79	1.99	1.99	2.01	2.01	3.21	3.21	4
25	0	0.95	0.95	1.89	1.89	2.11	2.11	3.05	3.05	4
30	0	1.07	1.07	1.83	1.83	2.17	2.17	2.93	2.93	4

A: 正の系列相関あり
B: 系列相関の有無を判定不能
C: 系列相関なし
D: 系列相関の有無を判定不能
E: 負の系列相関あり

表 2: ダービン・ワトソン統計量の 5 % 点の上限と下限

	$k'=1$		$k'=2$		$k'=3$		$k'=4$		$k'=5$	
T	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du
15	1.08	1.36	0.95	1.54	0.82	1.75	0.69	1.97	0.56	2.21
16	1.10	1.37	0.98	1.54	0.86	1.73	0.74	1.93	0.62	2.15
17	1.13	1.38	1.02	1.54	0.90	1.71	0.78	1.90	0.67	2.10
18	1.16	1.39	1.05	1.53	0.93	1.69	0.82	1.87	0.71	2.06
19	1.18	1.40	1.08	1.53	0.97	1.68	0.86	1.85	0.75	2.02
20	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68	0.90	1.83	0.79	1.99
21	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	0.93	1.81	0.83	1.96
22	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	0.96	1.80	0.86	1.94
23	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66	0.99	1.79	0.90	1.92
24	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	0.93	1.90
25	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	0.95	1.89
26	1.30	1.46	1.22	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	0.98	1.88
27	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.01	1.86
28	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85
29	1.34	1.48	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84
30	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83
31	1.36	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	1.09	1.83
32	1.37	1.50	1.31	1.57	1.24	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82
33	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81
34	1.39	1.51	1.33	1.58	1.27	1.65	1.21	1.73	1.15	1.81
35	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80
36	1.41	1.52	1.35	1.59	1.29	1.65	1.24	1.73	1.18	1.80
37	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.80
38	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.21	1.79
39	1.43	1.54	1.38	1.60	1.33	1.66	1.27	1.72	1.22	1.79
40	1.44	1.54	1.39	1.60	1.34	1.66	1.29	1.72	1.23	1.79
45	1.48	1.57	1.43	1.62	1.38	1.67	1.34	1.72	1.29	1.78
50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77
55	1.53	1.60	1.49	1.64	1.45	1.68	1.41	1.72	1.38	1.77
60	1.55	1.62	1.51	1.65	1.48	1.69	1.44	1.73	1.41	1.77
65	1.57	1.63	1.54	1.66	1.50	1.70	1.47	1.73	1.44	1.77
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.52	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77
75	1.60	1.65	1.57	1.68	1.54	1.71	1.51	1.74	1.49	1.77
80	1.61	1.66	1.59	1.69	1.56	1.72	1.53	1.74	1.51	1.77
85	1.62	1.67	1.60	1.70	1.57	1.72	1.55	1.75	1.52	1.77
90	1.63	1.68	1.61	1.70	1.59	1.73	1.57	1.75	1.54	1.78
95	1.64	1.69	1.62	1.71	1.60	1.73	1.58	1.75	1.56	1.78
100	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78

となり，
$Y_i^* = (Y_i - \rho Y_{i-1})$,
$X_i^* = (X_i - \rho X_{i-1})$
を新たな変数として，

$$Y_i^* = \alpha' + \beta X_i^* + \epsilon_i,$$

に最小二乗法を適用する。$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ は互いに独立とするなので，最小二乗法を適用が可能となる。ただし，$\alpha' = \alpha(1-\rho)$ の関係が成り立つことに注意。
より一般的に，回帰式が

$$\begin{aligned} &Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i, \\ &u_i = \rho u_{i-1} + \epsilon_i, \end{aligned}$$

のときの推定を考える。ただし，$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ は互いに独立とする。
u_i を消去すると，

$$\begin{aligned} (Y_i - \rho Y_{i-1}) = &\beta_1 (X_{1i} - \rho X_{1,i-1}) \\ &+ \beta_2 (X_{1i} - \rho X_{2,i-1}) \\ &+ \cdots \\ &+ \beta_k (X_{1i} - \rho X_{k,i-1}) + \epsilon_i, \end{aligned}$$

となり，
$Y_i^* = (Y_i - \rho Y_{i-1})$,
$X_{1i}^* = (X_{1i} - \rho X_{1,i-1})$,
$X_{2i}^* = (X_{2i} - \rho X_{2,i-1})$,
$\cdots$,
$X_{ki}^* = (X_{ki} - \rho X_{k,i-1})$
を新たな変数として，

$$Y_i^* = \beta_1 X_{1i}^* + \beta_2 X_{2i}^* + \cdots + \beta_k X_{ki}^* + \epsilon_i$$

最小二乗法を適用する。$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ は互いに独立とするなので，最小二乗法を適用が可能となる。
ρ の求め方について

1. ダービン・ワトソン比がゼロに近い場合，$\rho = 1$ と近似して，

   $$Y_i^* = \beta_1 X_{1i}^* + \beta_2 X_{2i}^* + \cdots + \beta_k X_{ki}^* + \epsilon_i,$$

   として推定する。ただし，$Y_i^* = Y_i - Y_{i-1}$，$X_{1i}^* = X_{1i} - X_{1,i-1}$ とする。

2. DW は近似的に $DW \approx 2(1-\widehat{\rho})$ と表されるので，DW から ρ の推定値 $\widehat{\rho}$ を逆算して，

   $Y_i^* = (Y_i - \widehat{\rho} Y_{i-1})$,

   $X_{1i}^* = (X_{1i} - \widehat{\rho} X_{1,i-1})$,

   $X_{2i}^* = (X_{2i} - \widehat{\rho} X_{2,i-1})$,

$\cdots,$

$X^*_{ki} = (X_{ki} - \widehat{\rho} X_{k,i-1})$

を新たな変数として，

$$Y^*_i = \beta_1 X^*_{1i} + \beta_2 X^*_{2i} + \cdots + \beta_k X^*_{ki} + \epsilon_i,$$

に最小二乗法を適用する。

3. 収束計算によって求める。

   (i) まず，

   $$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i,$$

   に最小二乗法を適用し，$\widehat{u}_1, \widehat{u}_2, \cdots, \widehat{u}_n$ を求める。

   (ii) 次に，

   $$\widehat{u}_i = \rho \widehat{u}_{i-1} + \epsilon_i,$$

   に最小二乗法を適用し，$\widehat{\rho}$ を求める。

   (iii) データを変換する。すなわち，

   $Y^*_i = (Y_i - \widehat{\rho} Y_{i-1}),$

   $X^*_{1i} = (X_{1i} - \widehat{\rho} X_{1,i-1}),$

   $X^*_{2i} = (X_{2i} - \widehat{\rho} X_{2,i-1}),$

   $\cdots,$

   $X^*_{ki} = (X_{ki} - \widehat{\rho} X_{k,i-1})$

   を新たな変数として，

   $$Y^*_i = \beta_1 X^*_{1i} + \beta_2 X^*_{2i} + \cdots + \beta_k X^*_{ki} + \epsilon_i,$$

   を計算して，$\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, \cdots, \widehat{\beta}_k$ を求める。

   (iv) さらに，

   $$\widehat{u}_i = Y_i - \widehat{\beta}_1 X_{1i} - \widehat{\beta}_2 X_{2i} - \cdots - \widehat{\beta}_k X_{ki},$$

   から $\widehat{u}_i$ を再計算して，

   $$\widehat{u}_i = \rho \widehat{u}_{i-1} + \epsilon_i,$$

   から，最小二乗法により $\widehat{\rho}$ を求める。

   (v) (iii) と (iv) を収束するまで繰り返す。

   (iv) で得られた $\widehat{\rho}$ の有意性から，$H_0:\ \rho = 0$ の検定を行う方法もある。

1.4 遅れのある変数 (再考)

習慣的効果を考慮に入れたモデル：

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \gamma y_{t-1} + u_t,$$

ラグ付き内生変数が説明変数に用いられる。

x_t の y_t への効果は，短期効果，長期効果の 2 つある。β は短期効果を表す係数である。長期効果とは，$y_t = y_{t-1}$ となるときの，x_t から y_t への影響を示す効果である。

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \gamma y_t + u_t,$$

として，y_t について解くと，

$$y_t = \frac{\alpha}{1-\gamma} + \frac{\beta}{1-\gamma} x_t + \frac{1}{1-\gamma} u_t,$$

となり，$\dfrac{\beta}{1-\gamma}$ が x_t の y_t への長期効果を表す係数となる。

問題点：

1. 最小二乗法の仮定の一つに，説明変数は確率変数ではないという仮定がある。ラグ付き内生変数を説明変数に加えることによって，この仮定が満たされなくなる。最小二乗推定量は最小分散線型不偏推定量ではなくなる。

2. y_t と x_t とは，経済理論的に考えると，相関が高いはず。y_t と y_{t-1} は相関が高い。当然，y_{t-1} と x_t も高い相関を示す。

   $\Longrightarrow$ 多重共線性の可能性が高い。

3. DW 統計量は意味をなさない (詳細略)。実際には誤差項に系列相関があるにもかかわらず，標本数 (データ数) が増えるにつれて，DW は 2 に近づいてしまう。すなわち，系列相関なしと判定されてしまう。

   $\Longrightarrow$ 代わりに，h 統計量を使う。

   h 統計量は次のように求められる。

   $$h = \widehat{\rho} \sqrt{\frac{T}{1 - T s^2_{\widehat{\gamma}}}},$$

   T は標本数 (データ数)，$s_{\widehat{\gamma}}$ は $\widehat{\gamma}$ の標準誤差，$\widehat{\rho}$ は $\widehat{\rho} = \dfrac{\sum_{t=2}^T \widehat{u}_t \widehat{u}_{t-1}}{\sum_{t=2}^T \widehat{u}^2_{t-1}}$ で，$\widehat{u}_t$ はもとのモデルの最小二乗法による残差である。

   帰無仮説は，$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$ のモデルにおいて，$H_0:\ \rho = 0$ であり，対立仮説は $H_1:\ \rho \neq 0$ である。帰無仮説 $H_0:\ \rho = 0$ のもとで，標本数 T が増加するにつれて，h は標準正規分布に近づくことが知られている。よって，

   (a) $|h| > z_{\alpha/2}$ のとき，有意水準 $100 \times \alpha$ % で H_0 を棄却する。

   (b) $|h| < z_{\alpha/2}$ のとき，有意水準 $100 \times \alpha$ % で H_0 を採択する。

   ただし，$z_{\alpha/2}$ は標準正規分布表から得られた $100 \times \dfrac{\alpha}{2}$ % 点の値である。