時系列分析

1　非定常時系列

非定常時系列に関する議論は，計量経済学特有のものであり，近年目覚ましい発展をとげている。本節では，単位根，見せかけ回帰，共和分をできるだけ簡単に解説する。そのため，本書では，限られたほんの一部分を紹介する。より詳細な議論は，例えば,『計量経済学』(森棟公夫著，東洋経済新報社，1999 年) や『計量経済学』(羽森茂之著，中央経済社，2000 年) 等が参考になるであろう。

1.1　単位根

経済変数で，特に重要な非定常時系列モデルは，**ランダム・ウォーク過程** (random walk process) である。国内総生産 (GDP)，消費，投資，マネーサプライ等ほとんどの経済変数は，ランダム・ウォーク過程に従う非定常時系列であると言われている。ある時系列がランダム・ウォーク過程に従っているかどうかの検定を**単位根検定** (unit root test) と呼ぶ。この単位根検定における検定統計量は，本書でこれまで議論してきた t 分布や正規分布には従わないことがわかっている。

ランダム・ウォーク過程とは，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ の系列が,

$$X_t = X_{t-1} + u_t \tag{1}$$

と表現される。ただし，u_t は，平均ゼロ，分散 σ^2 の分布に従うものとする。$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ を**一階の階差をとる**という。一階の階差をとることによって定常過程となるとき，その系列は**一次の和分過程** (integrated process of order one) に従っていると呼ばれ，$I(1)$ 過程と表現される (定常過程は $I(0)$ と表される)。X_t が $I(d)$ 過程に従っているとき，$X_t \sim I(d)$ と表記することがある。この記号を使うと,

$$X_t \sim I(1) \iff \Delta X_t \sim I(0)$$

という関係がある。

さて，(1) 式に示された $I(1)$ 過程 X_t が非定常であることを示す。定常性 (または，弱定常性) の条件は，(i) X_t の平均は一定，(ii) X_t の分散も一定，(iii) X_t と X_{t-s} の共分散 (すなわち，自己共分散) は時間差のみに依存する，という性質がある。初期値 X_0 を定数 (非確率) と仮定し，(1) 式を繰り返し代入することによって,

$$X_t = X_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_t$$

という式が得られる。これを用いると,

$$\mathrm{E}(X_t) = X_0 \qquad \mathrm{V}(X_t) = t\sigma^2$$

となる。また,

$$X_t = X_{t-s} + u_{t-s+1} + u_{t-s+2} + \cdots + u_t$$

を用いると,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-s}) &= \mathrm{E}\Big((X_t - X_0)(X_{t-s} - X_0)\Big) \\
&= \mathrm{E}\Big((X_{t-s} + u_{t-s+1} + u_2 + \cdots + u_t - X_0)(X_{t-s} - X_0)\Big) \\
&= \mathrm{E}\Big((X_{t-s} - X_0)^2\Big) + \mathrm{E}\Big((u_{t-s+1} + u_2 + \cdots + u_t)(X_{t-s} - X_0)\Big) \\
&= \mathrm{V}(X_{t-s}) \\
&= (t-s)\sigma^2
\end{aligned}$$

となる。X_{t-s} は，過去の誤差項 $(u_1, u_2, \cdots, u_{t-s})$ とは相関を持つが，将来の誤差項 $(u_{t-s+1}, u_{t-s+2}, \cdots, u_t)$ とは無相関であることに注意せよ。以上から，$\mathrm{V}(X_t)$ は定数でなく時点 t に依存し，$\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-s})$ も時間差 s だけでなく時点 t にも依存することがわかる。t が大きくなると，$\mathrm{V}(X_t)$, $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-s})$ 共に無限大になる。したがって，ランダム・ウォーク過程 X_t は非定常であると言える。

さらに，X_t と X_{t-s} の相関係数 (すなわち，自己相関係数) は，(4.32) 式を用いると，

$$\rho(s) = \rho(X_t, X_{t-s}) = \frac{\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-s})}{\sqrt{\mathrm{V}(X_t)}\sqrt{\mathrm{V}(X_{t-s})}} = \frac{(t-s)\sigma^2}{\sqrt{t\sigma^2}\sqrt{(t-s)\sigma^2}} = \sqrt{\frac{t-s}{t}}$$

と計算される。

従来は，時系列モデルの特定化において，縦軸に $\rho(s)$，横軸に s をそれぞれとってグラフを描いて，時系列に単位根が含まれているかどうかを判断していた。すなわち，時系列に単位根が含まれている場合，t を一定としたとき，s が大きくなるにつれて，$\rho(s)$ はゆっくりと減衰していくという性質がある。この性質を利用して，従来はグラフを描いて視覚的に単位根があるかどうかを判断していた。しかし，ρ の値が 1 に近い定常過程の場合も，$\rho = 1$ の非定常過程の場合と同様に，自己相関関数が減衰的なものとなることが知られている。したがって，自己相関関数の形状からだけでは定常過程と非定常過程との区別をすることが実際には困難である。それを避けるために統計的な検定を行うことが必要とされるのである。1970 年代後半に単位根の検定が開発され，近年では統計的に定常か非定常かの検定が行われるようになった。

以下に，単位根検定の方法を簡単に説明する。X_t が AR(1) 過程

$$X_t = \theta X_{t-1} + u_t \tag{2}$$

に従っているとする。ただし，u_t は，$t = 1, 2, \cdots, n$ についてそれぞれ独立に，平均ゼロ，分散 σ^2 の分布に従うものとする。もし $|\theta| < 1$ であれば $X_t \sim I(0)$ であるが，もし $\theta = 1$ であれば X_t は単位根を持ち，$X_t \sim I(1)$ となる。経済時系列では，単位根があれば $\theta = 1$ となり，そうでなければ $\theta < 1$ となる。そのため，単位根検定では左片側検定が行われる。

実際に，検定するためには，(2) 式を

$$\Delta X_t = \beta X_{t-1} + u_t \tag{3}$$

と変形して，帰無仮説 $H_0:\ \beta = 0$，対立仮説 $H_1:\ \beta < 0$ の左片側検定を行うことになる ($\beta = \theta - 1$ という関係がある)。この場合，β の最小 2 乗推定量

$$\widehat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}\Delta X_t}{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2}$$

は，(9.14) 式に示される正規分布には従わないことが知られている。したがって，帰無仮説 $H_0:\ \beta = 0$ が正しいもとで，検定統計量

$$t_{\widehat{\beta}} = \frac{\widehat{\beta}}{Se(\widehat{\beta})} \tag{4}$$

も t 分布には従わず，通常の t 検定を適用することはできない。検定統計量 $t_{\widehat{\beta}}$ の分布は，明示的に求めることができず，特殊な関数形をしているが，t 分布よりも左側の裾野が広い分布となっていることが知られている (本書の範囲を越えるのでこれ以上この分布には言及しない)。したがって，検定統計量 $t_{\widehat{\beta}}$ を誤って通常の t 分布表 (付表 3) を用いて検定すると，対立仮説 $H_1:\ \beta < 0$ を過剰に採択してしまうことになる。言い換えると，実際は $I(1)$ 変数であるにもかかわらず，誤って t 分布表を用いると，$I(0)$ 変数と判定されてしまう可能性が高くなるのである。(3) 式にもとづく検定統計量 $t_{\widehat{\beta}}$ の分布の下側 1%点と 5%点の値は，表 1 に示されている (検定統計量 $t_{\widehat{\beta}}$ の分布は標本数 n に依存することに注意せよ)。具体的には，$t_{\widehat{\beta}}$ の統計値と表 1 中の数値とを比較する。もし $t_{\widehat{\beta}}$ の統計値が，表 1 中の対応する数値より大きければ，帰無仮説 $H_0:\ \beta = 0$ を採択することになる。この場合，X_t は単位根を持つ非定常時系列であると判断する。

表 1: 単位根検定

$\alpha \setminus n$	25	50	100	250	500	∞
0.01	-2.66	-2.62	-2.60	-2.58	-2.58	-2.58
0.05	-1.95	-1.95	-1.95	-1.95	-1.95	-1.95

図 1: 東京為替相場（終値，1997 年 1 月 6 日〜2000 年 3 月 31 日）

数値例： 1997 年 1 月 6 日〜2000 年 3 月 31 日の東京外国為替相場 (終値) の毎日のデータをとり，単位根があるかどうかを検定する。このとき，標本数は 798 である。図 1 はその期間の東京外国為替相場 (終値) の動きを表す。

図 1 に示される東京外国為替相場を X_t とする。(3) 式を最小 2 乗法を用いて推定し，次の結果を得た。

$$\Delta X_t = \underset{(-0.461)}{-\ 0.000149}\ X_{t-1}$$

括弧内は (4) 式の $t_{\widehat{\beta}}$ を表す。表 1 から，$n = 798$ の下側 5%点は -1.95 となる。$-0.461 > -1.95$ なので，帰無仮説 H_0： $\beta = 0$ を棄却できない。よって，X_t は単位根を持つ，すなわち，$X_t \sim I(1)$ と判定される。

1.2 見せかけ回帰

経済時系列の場合，全く関係のない変数間で回帰分析を行った結果，決定係数が高く t 値も高いという結果を得る傾向がある。この回帰は**見せかけ回帰** (spurious regression) と呼ばれ，これは経済時系列変数で回帰分析を行う場合に非常に重要な問題となる。

次の単回帰モデルを考える。

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

Y_t と X_t が次のように単位根を持つ非定常時系列であるとする。

$$Y_t = Y_{t-1} + \epsilon_t$$
$$X_t = X_{t-1} + \eta_t$$

ただし，ϵ_t, η_t は，すべての $t = 1, 2, \cdots, n$ について，互いに独立であるとする。

以上の設定のもとで，X_t は Y_t に影響を与えない変数であったとしても，次のような結果を得ることが知られている。

表 2: 残差の単位根検定

k'	1		2		3		4	
$n \setminus \alpha$	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05
50	−4.32	−3.67	−4.84	−4.11	−4.94	−4.35	−5.41	−4.76
100	−4.07	−3.37	−4.45	−3.93	−4.75	−4.22	−5.18	−4.58
200	−4.00	−3.37	−4.35	−3.78	−4.70	−4.18	−5.02	−4.48

1. 回帰係数 β に関する t 統計量 (t 値) は，観測数が大きければ，大きな値となりやすい。無関係な変数間の回帰なので，t 値は絶対値で小さい値となるべきである。しかし，逆に大きな t 値を示し，間違った推論になる傾向がある。

2. 決定係数 R^2 は変数間の関係がないのでゼロに近づくべきであるが，見せかけ回帰では 0 と 1 の何らかの間の値をとる。ゼロに近いとは限らず，逆に 1 に近い値をとる可能性も十分にある。

3. DW 比はゼロに近い値となる。すなわち，誤差項 u_t の強い正の系列相関があると判断される。

このように，全く意味のない回帰を，得られた推定結果から，あたかも意味のあるように解釈してしまうことが起こり得るのである。このような状況のもとでは，最小 2 乗推定量 $\widehat{\beta}$ は β の一致推定量にはならないということも知られている。

見せかけ回帰を避けるためには，誤差項 u_t が定常である必要がある。これは，次節で述べる共和分という概念に密接に関連する。

1.3 共和分

Y_t, X_t 共に単位根を持つ，すなわち，$Y_t \sim I(1)$, $X_t \sim I(1)$ とする。このとき，Y_t と X_t の線形結合が定常，すなわち，$Y_t - \beta X_t \sim I(0)$ であれば，Y_t と X_t とは**共和分** (cointegration) の関係にあるという。

重要な点は，次の回帰

$$Y_t = \beta X_t + u_t$$

を考えた場合，以下のようにまとめられる。

(i) $u_t \sim I(1)$ のとき，β の最小 2 乗推定量 $\widehat{\beta}$ は一致性を持たず，しかも，回帰式の結果を評価すること自体に意味がなくなる。($\longrightarrow$ 見せかけ回帰)

(ii) $u_t \sim I(0)$ のとき，β の最小 2 乗推定量 $\widehat{\beta}$ は一致性を持ち，Y_t と X_t との間には安定的な関係がある。($\longrightarrow$ 共和分回帰)

(ii) の場合は，$\beta \neq 0$ となることに注意せよ。もし $\beta = 0$ であれば，$Y_t = u_t$ となり，$Y_t \sim I(1)$ なので，$u_t \sim I(1)$ となる必要がある。よって，$u_t \sim I(0)$ となるためには，$\beta \neq 0$ でなければならない。

このように，誤差項 u_t が定常かどうかによって，回帰式の意味が大きく異なることになる。したがって，回帰式に意味があるかどうかを調べるために，共和分の検定を行う必要がある。様々な検定方法が提案されているが，本書では，最も簡単な方法を紹介する。

定数項を含めて，次の回帰式

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

図 2: 利付国債・10 年物（年率，1997 年 1 月 6 日〜2000 年 3 月 31 日）

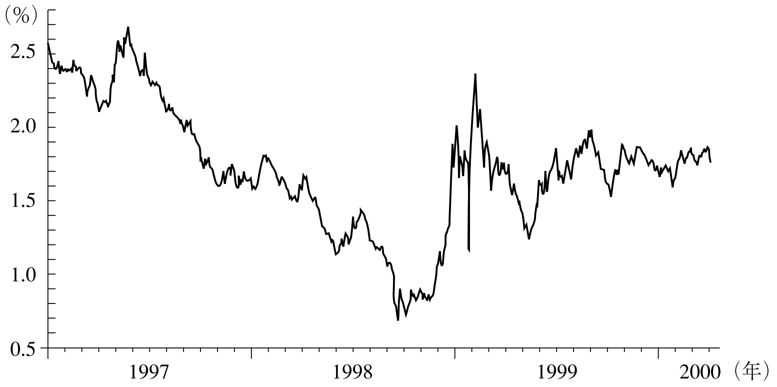

図 3: 東証株価・日経 225 種平均（終値，1997 年 1 月 6 日〜2000 年 3 月 31 日）

を考える。共和分分析を行う前に，まず最初に，行わなければならないことは，1.1 節で示した単位根検定である。すなわち，まず，Y_t, X_t 共に，$Y_t \sim I(1)$, $X_t \sim I(1)$ であることを検定によって確認する。次に，最小２乗法によって α, β を推定し，残差 $e_t = Y_t - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} X_t$ を求める。最後に，

$$\Delta e_t = \gamma e_{t-1} + v_t \tag{5}$$

から，帰無仮説 H_0： $\gamma = 0$，対立仮説 H_1： $\gamma < 0$ の単位根検定を行う。このとき，検定統計量

$$t_{\widehat{\gamma}} = \frac{\widehat{\gamma}}{Se(\widehat{\gamma})}$$

の分布は，表 1 に示された分布表とも付表 3 の t 分布表とも異なり，この場合は表 2 を用いる。表 2 では，標本数 (n) と説明変数の個数 $(k' = k - 1)$ に依存して，検定統計量 $t_{\widehat{\gamma}}$ の分布の下側 1%点と 5%点が示されている。$t_{\widehat{\gamma}}$ の統計値と表 2 中の対応する数値とを比較して，残差 e_t の単位根検定が行われる。分布表に表 2 を用いることを除いて，1.1 節で行った単位根検定をそのまま当てはめればよい。すなわち，帰無仮説 H_0： $\gamma = 0$ が棄却されれば，$u_t \sim I(0)$ と判定され，回帰式の分析 ($\widehat{\beta}$, R^2，DW 比等) を行うことができる。逆に，帰無仮説 H_0： $\gamma = 0$ を棄却できなければ，$u_t \sim I(1)$ と判定され，これ以上の回帰式の分析には全く意味がなくなる。この場合は，X_t とは別の $I(1)$ 変数を回帰式に含めなかったために，このような見せかけ回帰が生じたと考えられる。

数値例： 為替レート (Y_t), 金利 (X_{1t}), 株価 (X_{2t}) の間に，共和分関係があるかどうかを調べる。また，それぞれのデータは図 1〜図 3 に示された毎日のデータを利用する (標本数は 798 である)。

まず初めに，Y_t, X_{1t}, X_{2t} のそれぞれに，単位根があるかどうかを調べる。

Y_t については，1.1 節で単位根検定を行い，その結果，$Y_t \sim I(1)$ が確認された。

X_{1t} については，

$$\Delta X_{1t} = \underset{(-1.113)}{-\,0.001256}\ X_{1,t-1}$$

となった。ただし，括弧内は (4) 式の $t_{\widehat{\beta}}$ を表す。表 1 から，$n = 798$ の下側 5%点は -1.95 となる。$-1.113 > -1.95$ なので，X_{1t} は単位根を持つ，すなわち，$X_{1t} \sim I(1)$ と判定される。

X_{2t} については，

$$\Delta X_{2t} = \underset{(-0.074)}{-\,0.0000403}\ X_{2,t-1}$$

となった。$-0.074 > -1.95$ なので，X_{2t} も単位根を持ち，$X_{2t} \sim I(1)$ と判定される。以上のように，Y_t, X_{1t}, X_{2t} はすべて単位根を持つことがわかった。

次に，$Y_t = \alpha + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t$ の回帰を考える。最小 2 乗法によって，

$$Y_t = \underset{(52.6)}{161.1} - \underset{(-3.152)}{3.424}\ X_{1t} - \underset{(-8.386)}{0.002016}\ X_{2t}$$

$$R^2 = 0.235, \quad \overline{R}^2 = 0.234, \quad s = 9.07, \quad DW = 0.234$$

という推定結果を得た。

この回帰式が意味を持つために，u_t に単位根があるかどうかを調べる。しかし，u_t は誤差項であり未知なので，実際には残差 $(e_t = Y_t - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}_1 X_{1t} - \widehat{\beta}_2 X_{2t})$ に単位根があるかどうかを検定する。すなわち，(5) 式において，帰無仮説 $H_0:\ \gamma = 0$, 対立仮説 $H_1:\ \gamma < 0$ を検定することになる。そして，残差に単位根検定を行った結果，

$$\Delta e_t = \underset{(-1.771)}{-\,0.00830}\ e_{t-1}$$

が得られた。表 2 から，$n = 798$, $k' = 2$ に注意すると，下側 5%点は -3.78 となる。$-1.771 > -3.78$ なので，$u_t \sim I(1)$ と判定される。したがって，$H_0:\ \gamma = 0$ を棄却できず，$u_t \sim I(1)$ であるという結果が得られた。

以上をまとめると，$Y_t \sim I(1)$, $X_{1t} \sim I(1)$, $X_{2t} \sim I(1)$, $u_t \sim I(1)$ となるので，回帰式 $Y_t = \alpha + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t$ は見せかけ回帰となり，共和分の関係にないことが明らかとなった。