統計学

(2006年度後期 講義ノート)

平成 18 年 10 月 6 日 (金) 版

教科書『基本統計学 (第2版)』

(豊田・大谷・小川・長谷川・谷﨑著，東洋経済新報社，2002年)

谷﨑　久志
神戸大学・経済学部

目 次

- この講義ノートは，
  `http://ht.econ.kobe-u.ac.jp/~tanizaki/class`
  からダウンロード可。
- この講義ノートの文中のページは教科書『基本統計学 (第 2 版)』のページに対応。

序説 (P.1)

1. 統計的記述：

   資料の収集と整理 (平均値・分散・メディアン等の計算) $\Longrightarrow$ 第 1, 2 章

2. 統計的推測：

   標本から母集団の特徴をつかむこと

   (a) 標本： データを標本と考える

   (b) 母集団： 標本を含む全体

   (c) 母集団の特徴： 母集団の特性を表すパラメータ (母数という)

   (d) パラメータ (母数)： 平均，分散

   $\Longrightarrow$ 母数 (パラメータ) の推定と仮説検定が主な内容

1 度数分布 (P.3)

1.1 変数 (P.3)

変数の種類 (P.3)

1. 連続型変数： ある区間内の任意の実数値をとりうる変数 (身長，体重，温度，$\cdots$)

2. 離散型変数： 不連続な値しかとらない変数 (サイコロの出た目，家族数，$\cdots$)
   ただし，離散型変数を連続型変数とみなす場合も多い (例： 金額は離散型変数，1997 年の GNP は 514343.1 $\times$ 10 億円で，1 円に対して，GNP の値はあまりにも大きい)

データの種類 (P.8)

1. 時系列データ： 時間に依存するデータ (P.5 の表 1.1，P.8 の表 1.4)

2. クロスセクション・データ (横断面データ)： 家計，企業等の一時点でのデータの系列 (P.8 の表 1.5，P.9 の表 1.6)

1.2 度数分布 (P.4)

表 1.2 (P.5) のデータ (20 個の物体の重さ):

4.3	5.2	7.2	6.4	3.5	5.6	6.7	6.1	4.1	6.8
5.0	5.6	3.8	4.6	5.8	5.1	6.2	5.3	7.4	5.9

このデータを整理する。
$\Longrightarrow$ 表 1.3 (P.7)

階級値	階級境界値	度数
3.45	2.95〜3.95	2
4.45	3.95〜4.95	3
5.45	4.95〜5.95	8
6.45	5.95〜6.95	5
7.45	6.95〜7.95	2
	合計	20

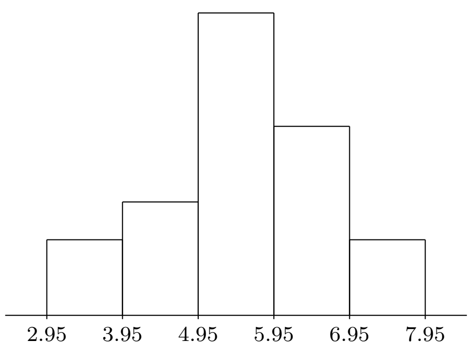
をもとにして，

表 1.3 20 個の物体の重さの度数分布表

階級値	階級境界値	度数	相対度数	累積度数	累積相対度数
3.45	2.95〜3.95	2	0.10	2	0.10
4.45	3.95〜4.95	3	0.15	5	0.25
5.45	4.95〜5.95	8	0.40	13	0.65
6.45	5.95〜6.95	5	0.25	18	0.90
7.45	6.95〜7.95	2	0.10	20	1.00
	合計	20	1.000		

を得る。小数第 2 位の 0.05 の単位で区間を分けている理由
$\longrightarrow$ 四捨五入の関係
小数第 1 位の 0.1 の単位で区間を分けた場合，境界値がどの階級に属するか区別できなくなる。(例えば，5.0 は 4.95 以上から 5.05 未満の間の数値)

図 1.1 20 個の物体の重さのグラフ



グラフの形

- 右の裾野が広い $\Longrightarrow$ 右に歪んでいる

- 左の裾野が広い $\Longrightarrow$ 左に歪んでいる

グラフの作り方

1. 階級境界値：階級の境界を定める値

2. 階級値：階級境界値の中点

3. 度数：ある階級に属するデータの数

4. 度数分布表：各階級とその度数を表に表したもの

5. ヒストグラム：度数分布をグラフに表す

6. 相対度数：各階級の度数をデータの総数で割ったもの，すなわち，各階級に属するデータの割合

7. 累積度数：ある階級以下の度数を合計したもの

8. 累積相対度数：ある階級以下の相対度数を合計したもの

2　代表値 (P.15)

度数分布表，ヒストグラム： 統計データを整理し，母集団に関する情報を得る一つの方法。
分布の状態を数値で表したい。
代表値： データを代表する値 $\Longrightarrow$ 平均値，分散，標準偏差，中央値 (メディアン)，最頻値 (モード)，…

2.1　平均値 (P.15)

n 個のデータ： $x_1, x_2, \cdots, x_n$

算術平均 (P.15)：

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

表 1.2 (P.5) のデータから

$$\overline{x} = \frac{1}{20}(4.3 + 5.2 + \cdots + 5.9) = 5.53$$

となる。

加重平均 (P.16)：

階級値	階級境界値 (以上)　(未満)	度数
m_1	$a_0 \sim a_1$	f_1
m_2	$a_1 \sim a_2$	f_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m_k	$a_{k-1} \sim a_k$	f_k
	合計	n

ただし，$m_1 = \dfrac{a_0 + a_1}{2}$, $m_2 = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$, $\cdots$,
$m_k = \dfrac{a_{k-1} + a_k}{2}$ とする。

上のような度数分布表が利用可能なとき,

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(f_1 m_1 + f_2 m_2 + \cdots + f_k m_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i m_i$$

として，平均値を計算することが出来る。$\Longrightarrow$ 加重平均 (各階級値を度数でウエイトづけして平均したもの)

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{n} m_i$$

$\dfrac{f_i}{n}$ は相対度数である。
上の表のデータの平均を求めると,

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1}{20}\Big(2 \times 3.45 + 3 \times 4.45 \\ &\quad +8 \times 5.45 + 5 \times 6.45 + 2 \times 7.45\Big) \\ &= 5.55\end{aligned}$$

階級の幅の選び方によって，多少，値は異なる。

2.2　分散，標準偏差 (P.18)

分散，標準偏差： データの散らばり具合を表す
分散，標準偏差が大きければ，データの存在する範囲が広い
標準偏差＝分散の平方根
分散 (s^2 で表す) の定義：

$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{1}{n}\Big((x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2\Big) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\end{aligned}$$

ただし，$\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ とする。

標準偏差： s
分散の実際の計算には，

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2$$

を用いる。
なぜなら，

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2\overline{x}x_i + \overline{x}^2) \\ &= \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n}\overline{x}^2\Big) \\ &= \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n\overline{x}^2 + n\overline{x}^2\Big) \\ &= \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\Big) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2 \end{aligned}$$

となる。
表 1.2 (P.5) のデータの分散を求めると，

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{20}\Big((4.3-5.53)^2 + (5.2-5.53)^2 + \cdots \\ &\quad +(5.9-5.53)^2\Big) \\ &= 1.1591 \end{aligned}$$

または，

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{20}(4.3^2 + 5.2^2 + \cdots + 5.9^2) - 5.53^2 \\ &= 1.1591 \end{aligned}$$

$s = 1.0766$ ===＞ 標準偏差
表 2.1 (P.16) の度数分布表からの計算では，

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i(m_i - \overline{x})^2$$

となる。ただし，$\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} f_i m_i$ とする。
実際の計算には，

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i m_i^2 - \overline{x}^2$$

を使う。
なぜなら，

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i(m_i - \overline{x})^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i(m_i^2 - 2\overline{x}m_i + \overline{x}^2) \\ &= \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{k} f_i m_i^2 - 2\overline{x}\sum_{i=1}^{k} f_i m_i + \overline{x}^2\sum_{i=1}^{k} f_i\Big) \\ &= \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{k} f_i m_i^2 - 2n\overline{x}^2 + n\overline{x}^2\Big) \\ &= \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{k} f_i m_i^2 - n\overline{x}^2\Big) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i m_i^2 - \overline{x}^2 \end{aligned}$$

となる。
上の表のデータの分散を求めると，

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{20}\Big(2(3.45-5.55)^2 + 3(4.45-5.55)^2 \\ &\quad +8(5.45-5.55)^2 + 5(6.45-5.55)^2 \\ &\quad +2(7.45-5.55)^2\Big) \\ &= 1.19 \end{aligned}$$

または，

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{20}(2\times 3.45^2 + 3\times 4.45^2 \\ &\quad +8\times 5.45^2 + 5\times 6.45^2 + 2\times 7.45^2) - 5.55^2 \\ &= 1.19 \end{aligned}$$

すなわち，$s = 1.0909$,

2.3 メディアン，モード (P.17)

- 範囲： 最大値－最小値
- 四分位点：
  25 %点 (第 1 四分位点)，50 %点 (第 2 四分位点)，75 %点 (第 3 四分位点) のこと
- 四分位範囲： 第 3 四分位点－第 1 四分位点
- メディアン（中央値）：
  大きい順に並べて，真ん中の値 (第 2 四分位点)

- モード（最頻値）：
  最も多い度数の階級値 (表 1.3 のデータでは 5.45，階級の幅によって変わる)

2.4　相関係数 (P.22)

2 変数データの組に関する代表値 $\Longrightarrow$ 共分散，相関係数
例： 100 人の家計からの消費と所得，身長と体重
n 組のデータ (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\cdots$, (x_n, y_n)
共分散 s_{xy}

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{1}{n}\Big((x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y}) \\ &\quad +\cdots+(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})\Big) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y}) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\overline{x}\overline{y} \end{aligned}$$

$s_{xy}>0$： 正の相関 (x と y との関係はプラスの傾き)
$s_{xy}<0$： 負の相関 (x と y との関係はマイナスの傾き)
$s_{xy}=0$： 相関なし (x と y との関係は正負の傾きを決定できず)

相関 $\Longrightarrow$ 互いにかかわりを持つこと。相互に関係しあっていること。(『国語大辞典 (新装版)』小学館，1988)
相関の強弱を表す指標 $\Longrightarrow$ 相関係数 r

$$r=\frac{s_{xy}}{s_xs_y}$$

ただし，

$$s_x^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2,\quad s_y^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2,$$

とし，s_x, s_y は x の標準偏差，y の標準偏差である。
$r>0$： 正の相関 (x と y との関係はプラスの傾き)
$r<0$： 負の相関 (x と y との関係はマイナスの傾き)
$r=0$： 相関なし (x と y との関係は正負の傾きを決定できず)

r は，

$$-1\le r\le 1$$

となる。

証明：
次のような t に関する式を考える。

$$f(t)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big((x_i-\overline{x})t-(y_i-\overline{y})\Big)^2,$$

平方和なので，必ずゼロ以上となる。よって，すべての t について，$f(t)\ge 0$ となるための条件を求めればよい。t に関する 2 次方程式の判別式がゼロ以下となる条件を求める。

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 \\ &\quad +2t\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y}) \\ &\quad +\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2 \\ &= s_x^2t^2+2s_{xy}t+s_y^2 \end{aligned}$$

$$\frac{D}{2}=s_{xy}^2-s_x^2s_y^2\le 0$$

$$\frac{s_{xy}^2}{s_x^2s_y^2}\le 1,$$

$$-1\le\frac{s_{xy}}{s_xs_y}\le 1,$$

を得る。
r が 1 に近いほど， 正の相関が強くなる (x と y のプロットが正の傾きで一直線上に近づく)。
r が -1 に近いほど， 負の相関が強くなる (x と y のプロットが負の傾きで一直線上に近づく)。
$r=-1,1$ のとき，x と y は一直線上に並ぶ ($r=1$ は正の傾き，$r=-1$ は負の傾き)。

3　確率 (P.27)

3.1　基礎概念 (集合，P.27)

1. 集合 A
2. a が集合 A に属する
   $\Longrightarrow$ a を集合 A の要素または元と呼ぶ
   $\Longrightarrow$ $a\in A$
3. b が集合 A に属していない $\Longrightarrow$ $b\notin A$

4. 空集合 ϕ： 要素を持たない集合
5. 全体集合 Ω： すべての要素からなる集合
6. 集合 A, B
7. 部分集合：集合 A が集合 B のすべての要素を含んでいる

   $\Longrightarrow$ 集合 B を集合 A の部分集合

   $\Longrightarrow A \supset B$
8. 和集合 $A \cup B$： 集合 A と集合 B の少なくとも一方に属する要素の集合
9. 共通集合，積集合 $A \cap B$： 集合 A と集合 B のどちらにも属する要素の集合
10. 差集合 $A - B$： 集合 A に属していて集合 B に属さない要素の集合
11. 補集合 A^c： 全体集合 Ω の中で集合 A に属さない要素の集合
12. 公式 ($\cup$ と $\cap$ を入れ替えても成立)：

    結合法則： $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

    交換法則： $A \cup B = B \cup A$

    分配法則： $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

    ド・モルガンの法則： $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

3.2 標本空間 (P.31)

1. 試行： 繰り返し可能な実験 (例：サイコロ投げ)
2. 標本点 ω： 試行によって得られる個々の結果，実験の可能な結果 (1, 2, 3, 4, 5, 6 のどれかの目) $\Longrightarrow$ 集合の「要素」に対応
3. 標本空間，全事象 Ω：標本点全体の集合，実験のすべての可能な結果の集まり $\Longrightarrow$ 「全体集合」
4. 事象： 標本空間 Ω の部分集合，標本点の集まり (例：偶数の目が出るという事象は 2, 4, 6 の目が出るという標本点の集まり) $\Longrightarrow$ 「一つの集合」
5. 空事象 ϕ： 何の結果も起こらない事象 $\Longrightarrow$ 「空集合」
6. 余事象： ある事象が起こらないという事象 $\Longrightarrow$ 「補集合」
7. 和事象，積事象 $\Longrightarrow$ 「和集合」,「積集合」
8. 排反： $A \cap B = \phi$ のとき，事象 A と B は排反であるという $\Longrightarrow$ A と A^c とは排反

例： サイコロの出る目

1. 標本空間 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2. 偶数の目が出る事象 $A = \{2, 4, 6\}$
3. その余事象 $A^c = \{1, 3, 5\}$ $\Longrightarrow$ 奇数の目が出る事象
4. $B = \{1, 2, 3, 4\}$ とする。

   A と B の和事象： $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
5. A と B の積事象： $A \cap B = \{2, 4\}$
6. $C = \{1, 3\}$ とする。

   $A \cap C = \phi \Longrightarrow$ 事象 A と C は排反

   $A \cap A^c = \phi \Longrightarrow$ 事象 A とその余事象 A^c は排反

例：コイン投げ 3 回

1. 表を H，裏を T とする。
2. 標本点は次の 8 つ：

   $\omega_1 = \{H, H, H\}$,

   $\omega_2 = \{H, H, T\}$,

   $\omega_3 = \{H, T, H\}$,

   $\omega_4 = \{H, T, T\}$,

   $\omega_5 = \{T, H, H\}$,

   $\omega_6 = \{T, H, T\}$,

   $\omega_7 = \{T, T, H\}$,

   $\omega_8 = \{T, T, T\}$
3. 標本空間： $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$
4. 2 回目が表であるという事象 E：

   $E = \{\omega_1, \omega_2, \omega_5, \omega_6\}$
5. 2 回表が出るという事象 F：

   $F = \{\omega_2, \omega_3, \omega_5\}$

6. $E \cup F = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_6\}$

   $E \cap F = \{\omega_2, \omega_5\}$

7. $E^c = \{\omega_3, \omega_4, \omega_7, \omega_8\}$

   $F^c = \{\omega_1, \omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$

8. $(E \cup F)^c = \{\omega_4, \omega_7, \omega_8\}$

   $E^c \cap F^c = \{\omega_4, \omega_7, \omega_8\}$

   $(E \cup F)^c = E^c \cap F^c \Longrightarrow$ ド・モルガンの法則

9. $(E \cap F)^c = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$

   $E^c \cup F^c = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$

   $(E \cap F)^c = E^c \cup F^c \Longrightarrow$ ド・モルガンの法則

3.3 確率 (P.32)

1. $n(A)$： 事象 A が持つ標本点の数

   $\Longrightarrow$ その事象が起こる場合の数

2. $P(A)$： 事象 A が起こる確率

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

例 3.1：サイコロ投げ

1. 標本空間 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

   $\Longrightarrow n(\Omega) = 6$

2. 事象 $A = \{1, 3\}$ が起こる確率

   $\Longrightarrow n(A) = 2$

   $\Longrightarrow P(A) = \dfrac{2}{6}$

3. 偶数の目が出る確率

   $\Longrightarrow$ 偶数の目が出る事象 $B = \{2, 4, 6\}$

   $\Longrightarrow n(B) = 3$

   $\Longrightarrow P(B) = \dfrac{3}{6}$

4. 1 の目が出る確率

   $\Longrightarrow$ 1 の目が出る事象 $C = \{1\}$

   $\Longrightarrow n(C) = 1$

   $\Longrightarrow P(C) = \dfrac{1}{6}$

確率の性質：

1. $0 \le P(A) \le 1$

   証明：

   $n(\phi) \le n(A) \le n(\Omega)$

   $n(\phi) = 0$ により，

$$0 \le \frac{n(A)}{n(\Omega)} \le 1$$

   を得る。

2. $P(A^c) = 1 - P(A)$

   証明：

   $n(\Omega) = n(A) + n(A^c)$ の両辺を $n(\Omega)$ で割る。

3. $A \subset B \Longrightarrow P(A) \le P(B)$

   証明：

   $n(A) \le n(B)$ の両辺を $n(\Omega)$ で割る。

加法定理 (P.34)：

1. **加法定理 (P.34)：**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

   証明：

   $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$,

   $n(B) = n(B - A) + n(A \cap B)$,

   $n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B)$

   から $n(A - B)$, $n(B - A)$ を消去して，

   $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

   を得る。$n(\Omega)$ で両辺を割る。

2. 事象 A と B が排反の場合，$P(A \cap B) = 0$ なので，

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

   $\Longrightarrow$ P.35

乗法定理 (P.36)：

1. $P(A|B)$： 事象 B が起こったという条件のもとで事象 A が起こる確率 $\Longrightarrow$ 条件付き確率

2. **乗法定理 (P.36)：**

$$P(A\cap B)=P(A|B)P(B)$$

証明：

$$\begin{aligned}P(A|B)&=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{n(A\cap B)/n(\Omega)}{n(B)/n(\Omega)}\\&=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\end{aligned}$$

3. 例 3.2： ある大学の文系の学生に質問

$A=\{$ 数学が好きと答えた学生 $\}$

$B=\{$ 経済学部の学生 $\}$

$A\cap B=\{$ 数学が好きと答えた経済学部の学生 $\}$

$P(A|B)$ は数学が好きと答えた経済学部生の確率を表す。

4. **例題 3.2 (P.36) の変形，P.40 の問題 3.6：** ある大学の経済学部 (E) 300 人，法学部 (J) 200 人の合計 500 人の学生について，数学が好き (M) か嫌い (M^c) かを調査したところ次の結果を得た。

	経済学部 (E)	法学部 (J)
数学が好き (M)	30	20
数学が嫌い (M^c)	70	80
計	100	100

ただし，表中の数値は % で表されているものとする。

(a) 経済学部の学生でしかも数学が好きと答えた学生の確率,

すなわち，$P(E\cap M)$ について

$P(E\cap M)=P(M|E)P(E)$

$P(E)=300/(300+200)=0.6,$

$P(M|E)=0.3$ により,

$P(E\cap M)=P(M|E)P(E)=0.6\times 0.3=0.18$

(b) 数学が好きと答えた学生の中で経済学部の学生の確率,

すなわち，$P(E|M)$ について

$P(E|M)=P(E\cap M)/P(M)$

$P(E\cap M)=0.18$

$P(M)=P(\Omega\cap M)=P\Big((E\cup J)\cap M\Big)=P\Big((E\cap M)\cup(J\cap M)\Big)=P(E\cap M)+P(J\cap M)=P(M|E)P(E)+P(M|J)P(J)=0.3\times 0.6+0.2\times 0.4$

$P(E|M)=0.18/(0.18+0.08)=9/13$

5. $P(A|B)=P(A)$

$\Longrightarrow$ 事象 A と B が独立

$\Longrightarrow$ 事象 B が起こる確率は事象 A が起こる確率に依存しない

6. 事象 A と B が独立のとき,

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

4 確率変数と確率分布 (P.43)

変数 $\Longrightarrow$ 離散型変数，連続型変数
確率変数 $\Longrightarrow$ 離散型確率変数，連続型変数変数

4.1 確率変数 (P.43)

4.1.1 離散型確率変数 (P.43)

コイン投げで，表が出ると 0，裏が出ると 1 という数字で表す。
0, 1 という値をとる変数 X を考える。
$X=0\Longrightarrow$ 表が出たことを意味する
$X=1\Longrightarrow$ 裏が出たことを意味する

$$X(\{\text{ 表が出る }\})=0,\quad X(\{\text{ 裏が出る }\})=1$$

確率変数：X のように，X のどの値が出るか確実には分からないが，その確率が分かっている変数
確率変数 X は標本点 ω の関数であり,
確率変数 X が実現値 x をとる確率は,

$$P(X(\omega)=x)=P(X=x)=\frac{1}{2},\quad x=0,1$$

と書かれる。
この場合，確率変数 X の取りうる値は 0, 1 の不連続な値である。
不連続な値しか取らない確率変数 $\Longrightarrow$ 離散型確率変数
確率変数の値に対応する確率の系列 $\Longrightarrow$ 確率分布，特に，離散型確率分布

X の取る値	0	1	計
その確率	1/2	1/2	1

一般的に，離散型確率変数 X が $x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots$ の値を取り，その確率を $p_1, p_2, \cdots, p_i, \cdots$ とする。

X の取る値	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	計
その確率	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	1

注） 度数分布表では，x_i は階級値，p_i は相対度数にそれぞれ対応する。

$$P(X = x_i) = p_i$$

確率 p_i は確率変数 X の取りうる値に依存する。したがって，p_i は X の取りうる値の関数と考えられる。

$$p_i = f(x_i), \quad i = 1, 2, \cdots$$

$f(x_i)$ を確率変数 X の確率関数という。
確率が非負，確率の総和が 1 なので，

$$p_i = f(x_i) \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots$$
$$\sum_i p_i = \sum_i f(x_i) = 1$$

確率変数 X が x 以下の値をとる確率 $\Longrightarrow$ 分布関数，累積分布関数 $F(x)$

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= \sum_{i=1}^{r} p_i \\ &= \sum_{i=1}^{r} f(x_i), \end{aligned}$$

ただし，r は $x_r \leq x < x_{r+1}$ を満たす。
分布関数の性質：

$$F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1$$

例：コインを 3 つ投げて，表の出た個数を X で表すとき，X の確率分布は，

X の取る値	0	1	2	3	計
その確率	1/8	3/8	3/8	1/8	1

となる。

4.1.2 離散型確率分布：2 項分布 (P.45)

例 4.1, 4.2：
ある野球選手のヒットを打つ確率は 0.3 とする。
ヒットを打つという事象 H
ヒットを打たないという事象 H^c
$P(H) = 0.3$, $P(H^c) = 1 - P(H) = 0.7$
3 打席の打つとする。
ヒットを打つ回数を X とする。
X の確率分布を求める。

1 打席目	2 打席目	3 打席目	X	その確率
H	H	H	3	$0.3 \times 0.3 \times 0.3 = 0.027$
H	H	H^c	2	$0.3 \times 0.3 \times 0.7 = 0.063$
H	H^c	H	2	$0.3 \times 0.7 \times 0.3 = 0.063$
H	H^c	H^c	1	$0.3 \times 0.7 \times 0.7 = 0.147$
H^c	H	H	2	$0.7 \times 0.3 \times 0.3 = 0.063$
H^c	H	H^c	1	$0.7 \times 0.3 \times 0.7 = 0.147$
H^c	H^c	H	1	$0.7 \times 0.7 \times 0.3 = 0.147$
H^c	H^c	H^c	0	$0.7 \times 0.7 \times 0.7 = 0.343$

まとめると，$P(X = 0) = 0.343$,
$P(X = 1) = 3 \times 0.147 = 0.441$,
$P(X = 2) = 3 \times 0.063 = 0.189$,
$P(X = 3) = 0.027$,
となり，

X の取る値	0	1	2	3	計
その確率	0.343	0.441	0.189	0.027	1

を得る。

2 項分布で書き直すことができる。
定義：
ある事象が起こる確率 p
n 回の試行を行う。
x 回成功する確率 $P(X = x)$ は，

$$P(X = x) = {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \cdots, n$$

となる。ただし，

$${}_nC_x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

とする。
確認のため，$p=0.3, n=3$ とおいて，

$P(X=0)={}_3C_0 0.3^0(1-0.3)^{3-0}=0.7^3=0.343$
$P(X=1)={}_3C_1 0.3^1(1-0.3)^{3-1}=3\times 0.3\times 0.7^2=0.441$
$P(X=2)={}_3C_2 0.3^2(1-0.3)^{3-2}=3\times 0.3^2\times 0.7=0.189$
$P(X=3)={}_3C_3 0.3^3(1-0.3)^{3-3}=0.3^3=0.027$

を得る。

$n=1$ のときの 2 項分布 $\Longrightarrow$ ベルヌイ分布

4.1.3　連続型確率変数 (P.47)

確率変数の実現値が連続した値をとる場合
このような確率変数を連続型確率変数，
その確率分布を連続型確率分布

離散型の場合，$p_i=f(x_i)$

連続型の場合，$f(x)$ は連続曲線
確率密度関数，密度関数 $f(x)$

X が区間 (a,b) に入る確率は，

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

で表される (面積が確率を表す)。ただし，$a<b$ とする。

離散型は，

$$p_i=f(x_i)\geq 0,\quad i=1,2,\cdots$$
$$\sum_i p_i=\sum_i f(x_i)=1$$

連続型は

$$f(x)\geq 0,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$$

注）X を連続型確率変数とするとき，

$$P(X=x)=P(x\leq X\leq x)=\int_x^x f(t)\mathrm{d}t=0$$

となる。
したがって，

$$\begin{aligned}P(a\leq X\leq b)&=P(a<X\leq b)\\&=P(a\leq X<b)\\&=P(a<X<b)\end{aligned}$$

となる。

分布関数： $X<x$ となる確率 $P(X<x)$

$$F(x)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

$F(x)$ を用いると，

$$\begin{aligned}P(a<X<b)&=F(b)-F(a)\\&=\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

離散型と同様に，

$$F(\infty)=0,\quad F(\infty)=1$$

という性質を持つ。

4.2　期待値 (P.49)

確率変数 X のある関数： $g(X)$
定義：
$g(X)$ の期待値 $\mathrm{E}\big(g(X)\big)$：

$$\mathrm{E}\big(g(X)\big)=\begin{cases}\displaystyle\sum_i g(x_i)p_i=\sum_i g(x_i)f(x_i), \\ \qquad\qquad\text{離散型確率変数} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x, \\ \qquad\qquad\text{連続型確率変数}\end{cases}$$

1. 確率変数 X の平均 $\mathrm{E}(X)$
   $\Longrightarrow X$ の期待値, $g(X)=X$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\begin{cases}\displaystyle\sum_i x_i f(x_i), & \text{離散型確率変数}\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x, & \text{連続型確率変数}\end{cases}\\&=\mu,\quad (\text{または，}\mu_x)\end{aligned}$$

2. 確率変数 X の分散 $\mathrm{V}(X)$
   $\Longrightarrow (X-\mu)^2$ の期待値, $g(X)=(X-\mu)^2$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}\big((X-\mu)^2\big)\\
&= \begin{cases} \displaystyle\sum_i (x_i-\mu)^2 f(x_i), \\ \qquad\qquad \text{離散型確率変数} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x, \\ \qquad\qquad \text{連続型確率変数} \end{cases}\\
&= \sigma^2, \quad (\text{または}, \sigma_x^2)
\end{aligned}
$$

確率変数 X の分散 $\mathrm{V}(X)$

$\Longrightarrow$ X の確率分布の確率関数 (離散型の場合)，または，確率密度関数 (連続型の場合) の範囲が広ければ，$\mathrm{V}(X)$ は大きい。

いくつかの公式：

1. a, b を定数とする。

   定理 4.1 (P.51)： $\mathrm{E}(aX+b) = a\mathrm{E}(X)+b$

   証明：

   X が離散型確率変数の場合，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(aX+b) &= \sum_i (ax_i+b)f(x_i)\\
&= a\sum_i x_i f(x_i) + b\sum_i f(x_i)\\
&= a\mathrm{E}(X)+b
\end{aligned}
$$

   途中で，$\displaystyle\sum_i f(x_i)=1$ に注意

   X が連続型確率変数の場合，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(aX+b) &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b)f(x)\mathrm{d}x\\
&= a\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x\\
&\quad + b\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x\\
&= a\mathrm{E}(X)+b
\end{aligned}
$$

   途中で，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$ に注意

2. **定理 4.2 (P.51)：** $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2)-\mu^2$

   証明：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}\big((X-\mu)^2\big)\\
&= \mathrm{E}(X^2-2\mu X+\mu^2)\\
&= \mathrm{E}(X^2)-2\mu\mathrm{E}(X)+\mu^2\\
&= \mathrm{E}(X^2)-\mu^2
\end{aligned}
$$

   途中で，$\mu=\mathrm{E}(X)$ に注意

3. a, b を定数とする。

   定理 4.3 (P.52)： $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\mathrm{V}(X)$

   証明：

   $\mathrm{E}(aX+b) = a\mu+b$ に注意して，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(aX+b) &= \mathrm{E}\Big(\big((aX+b)-\mathrm{E}(aX+b)\big)^2\Big)\\
&= \mathrm{E}\Big((aX-a\mu)^2\Big)\\
&= \mathrm{E}\big(a^2(X-\mu)^2\big)\\
&= a^2\mathrm{E}\big((X-\mu)^2\big)\\
&= a^2\mathrm{V}(X)
\end{aligned}
$$

   を得る。

例：サイコロ投げ
確率分布：

X の取る値	x_1 1	x_2 2	x_3 3	x_4 4	x_5 5	x_6 6	計
その確率	p_1 $\frac{1}{6}$	p_2 $\frac{1}{6}$	p_3 $\frac{1}{6}$	p_4 $\frac{1}{6}$	p_5 $\frac{1}{6}$	p_6 $\frac{1}{6}$	1

平均：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{i=1}^{6} x_i p_i\\
&= 1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}\\
&\quad +4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}\\
&= \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

分散：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2) &= \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i \\ &= 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{6} \\ &+ 4^2 \times \frac{1}{6} + 5^2 \times \frac{1}{6} + 6^2 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{91}{6}\end{aligned}$$

を利用して,

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - \mu^2 \\ &= \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}\end{aligned}$$

その他：

1. 標準偏差： $\sigma = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$
2. 確率変数 X の標準化 (基準化)： $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$
3. **定理 4.4 (P.52)：** $\mathrm{E}(Z) = 0$, $\mathrm{V}(Z) = 1$

   証明：

   定理 4.1 (P.51), 定理 4.3 (P.52) について，$a = \dfrac{1}{\sigma}$, $b = -\dfrac{\mu}{\sigma}$ のケースを考える。

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z) &= \mathrm{E}(\frac{X-\mu}{\sigma}) \\ &= \frac{1}{\sigma}\mathrm{E}(X-\mu) \\ &= \frac{1}{\sigma}\big(\mathrm{E}(X) - \mu\big) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(Z) &= \mathrm{V}(\frac{X-\mu}{\sigma}) \\ &= \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{V}(X) \\ &= 1\end{aligned}$$

2 項分布の平均と分散　2 項分布：

$$\begin{aligned}f(x) &= {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \cdots, n,\end{aligned}$$

確率関数の性質より,

$$\sum_x {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} = 1$$

を得る。

注) 2 項定理:
$(p+q)^n = \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x p^x q^{n-x}$

$\mathrm{E}(X) = np$, $\mathrm{V}(X) = np(1-p)$
証明：
平均：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \sum_x x f(x) \\ &= \sum_x x\, {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_x x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_x \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= np \sum_x \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} (1-p)^{n-x} \\ &= np \sum_{x'} \frac{n'!}{x'!(n'-x')!} p^{x'} (1-p)^{n'-x'} \\ &= np \sum_{x'} {}_{n'}C_{x'} p^{x'} (1-p)^{n'-x'} \\ &= np\end{aligned}$$

ただし，$n' = n-1$, $x' = x-1$ と定義される。
分散：
$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2$ により，$\mathrm{E}(X^2)$ を求める。
$X^2 = X(X-1) + X$ を利用する。
$\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{E}\big(X(X-1)\big) + \mathrm{E}(X)$
したがって,
$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\big(X(X-1)\big) + \mu - \mu^2$ となる。
右辺第 1 項を求める。

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\big(X(X-1)\big) \\ &= \sum_x x(x-1) f(x) \\ &= \sum_x x(x-1)\, {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_x x(x-1) \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_x \frac{n!}{(x-2)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_x \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^{x-2} (1-p)^{n-x}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= n(n-1)p^2 \sum_{x'} \frac{n'!}{x'!(n'-x')!} p^{x'}(1-p)^{n'-x'} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{x'} {}_{n'}C_{x'} p^{x'}(1-p)^{n'-x'} \\
&= n(n-1)p^2
\end{aligned}
$$

途中で，$n' = n-2$, $x' = x-2$ と定義されている。
まとめると，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - \mu^2 \\
&= \mathrm{E}\big(X(X-1)\big) + \mu - \mu^2 \\
&= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 \\
&= -np^2 + np \\
&= np(1-p)
\end{aligned}
$$

4.3　同時確率分布 (P.54)

２つのサイコロ投げで，出る目の数を X, Y とする。
X と Y は独立なので，$X=i, Y=j$ $(i,j = 1,2,3,4,5,6)$ となる確率は，

$$
P(X=i, Y=j) = P(X=i)P(Y=j) = \frac{1}{36}
$$

となる。
$\Longrightarrow$ この確率の系列を確率変数 X と Y の同時確率分布と呼ぶ

注) 事象 A, B は独立 (P.38):

$$
P(A \cap B) = P(A)P(B)
$$

一般的に，離散型確率変数 X, Y の同時確率分布は，

$$
P(X=x_i, Y=y_j) = p_{ij} = f(x_i, y_j)
$$

$i = 1,2,\cdots,n$, $j = 1,2,\cdots,m$
によって与えられる。
$f(x_i, y_j)$： 同時確率関数

$X \setminus Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}

たて，よこでそれぞれ総和する。

$X \setminus Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	計 (X の周辺分布)
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}	$p_{n\cdot}$
計 (Y の周辺分布)	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot m}$	1

1. $p_{i\cdot}$, $i = 1,2,\cdots,n$：

   Y がどの値をとるかに依存せず，X が x_i という値をとる確率

   $\Longrightarrow$ 確率変数 X の周辺分布

   $$
   p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = f(x_i) = P(X = x_i)
   $$

   $f(x_i)$： 確率変数 X の周辺確率関数

2. $p_{\cdot j}$, $j = 1,2,\cdots,m$：

   X がどの値をとるかに依存せず，Y が y_j という値をとる確率

   $\Longrightarrow$ 確率変数 Y の周辺分布

   $$
   p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = f(y_j) = P(Y = y_j)
   $$

   $f(y_j)$： 確率変数 Y の周辺確率関数

3. 確率の総和は 1

   $$
   \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{m} p_{\cdot j} = 1
   $$

連続型についても同様

条件付き確率 (P.55)：　事象 A, B について，条件付き確率 (P.36):

$$
P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}
$$

をもとにして，

$Y = y_j$ の条件もとでの $X = x_i$ の確率

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}$$

確率関数による表現： $Y = y_j$ を与えたときの X の条件付き確率関数 $f(x_i|y_j)$

$$f(x_i|y_j) = \frac{f(x_i, y_j)}{f(y_j)}$$

事象 A, B は独立 (P.38):

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

をもとにして，
X が x_i という値をとる事象と Y が y_j という値をとる事象が独立

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

確率関数による表現：

$$f(x_i, y_j) = f(x_i)f(y_j)$$

$$p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}$$

すべての i, j について成り立つとき，X と Y は独立であるという。
連続型についても同様

期待値 (P.56)： ある関数 $g(X, Y)$ の期待値: $\mathrm{E}\big(g(X, Y)\big)$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\big(g(X, Y)\big) &= \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij} \\ &= \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) f(x_i, y_j)\end{aligned}$$

平均：
X の平均： X の期待値： $g(X, Y) = X$ のケース：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \sum_i \sum_j x_i p_{ij} = \sum_i \sum_j x_i f(x_i, y_j) \\ &= \sum_i x_i \sum_j p_{ij} = \sum_i x_i p_{i\cdot} = \sum_i x_i f(x_i) \\ &= \mu_x\end{aligned}$$

Y の平均： Y の期待値： $g(X, Y) = Y$ のケース：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y) &= \sum_i \sum_j y_j p_{ij} = \sum_i \sum_j y_j f(x_i, y_j) \\ &= \sum_j y_j \sum_i p_{ij} = \sum_j y_j p_{\cdot j} = \sum_j y_j f(y_j) \\ &= \mu_y\end{aligned}$$

分散：
X の分散： $(X - \mu_x)^2$ の期待値： $g(X, Y) = (X - \mu_x)^2$ のケース：

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}\big((X - \mu_x)^2\big) \\ &= \sum_i \sum_j (x_i - \mu_x)^2 p_{ij} \\ &= \sum_i \sum_j (x_i - \mu_x)^2 f(x_i, y_j) \\ &= \sum_i (x_i - \mu_x)^2 \sum_j p_{ij} = \sum_i (x_i - \mu_x)^2 p_{i\cdot} \\ &= \sum_i (x_i - \mu_x)^2 f(x_i) \\ &= \sigma_x^2\end{aligned}$$

Y の分散： $(Y - \mu_y)^2$ の期待値： $g(X, Y) = (Y - \mu_y)^2$ のケース：

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(Y) &= \mathrm{E}\big((Y - \mu_y)^2\big) \\ &= \sum_i \sum_j (y_j - \mu_y)^2 p_{ij} \\ &= \sum_i \sum_j (y_j - \mu_y)^2 f(x_i, y_j) \\ &= \sum_j (y_j - \mu_y)^2 \sum_i p_{ij} = \sum_j (y_j - \mu_y)^2 p_{\cdot j} \\ &= \sum_j (y_j - \mu_y)^2 f(y_j) \\ &= \sigma_y^2\end{aligned}$$

共分散：
X と Y の共分散: $(X - \mu_x)(Y - \mu_y)$ の期待値: $g(X, Y) = (X - \mu_x)(Y - \mu_y)$ のケース：

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathrm{E}\big((X - \mu_x)(Y - \mu_y)\big) \\ &= \sum_i \sum_j (x_i - \mu_x)(y_j - \mu_y) p_{ij} \\ &= \sum_i \sum_j (x_i - \mu_x)(y_j - \mu_y) f(x_i, y_j)\end{aligned}$$

いくつかの公式：

1. 確率変数 X, Y について,

定理 4.5 (P.57)： $\mathrm{E}(X \pm Y) = \mathrm{E}(X) \pm \mathrm{E}(Y)$

証明：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X \pm Y) &= \sum_i \sum_j (x_i \pm y_j) p_{ij} \\ &= \sum_i \sum_j x_i p_{ij} \pm \sum_i \sum_j y_j p_{ij} \\ &= \mathrm{E}(X) \pm \mathrm{E}(Y)\end{aligned}$$

2. 確率変数 X と Y が独立のとき,

定理 4.6 (P.57)： $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$

証明：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XY) &= \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} \\ &= \sum_i \sum_j x_i y_j p_{i\cdot} p_{\cdot j} \\ &= \sum_i x_i p_{i\cdot} \sum_j y_j p_{\cdot j} \\ &= \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)\end{aligned}$$

途中で，$p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}$ を用いる。

3. 確率変数 X, Y について,

定理 4.7 (P.58)： $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$

証明：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cov}(X, Y) \\ &= \sum_i \sum_j (x_i - \mu_x)(y_j - \mu_y) p_{ij} \\ &= \sum_i \sum_j (x_i y_j - \mu_x y_j - \mu_y x_i + \mu_x \mu_y) p_{ij} \\ &= \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} \\ &- \mu_x \sum_i \sum_j y_j p_{ij} \\ &- \mu_y \sum_i \sum_j x_i p_{ij} \\ &+ \mu_x \mu_y \sum_i \sum_j p_{ij} \\ &= \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} - \mu_x \mu_y - \mu_y \mu_x + \mu_x \mu_y \\ &= \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} - \mu_x \mu_y \\ &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)\end{aligned}$$

より，一般的な証明：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cov}(X, Y) \\ &= \mathrm{E}\big((X - \mu_x)(Y - \mu_y)\big) \\ &= \mathrm{E}\big(XY - \mu_x Y - \mu_y X + \mu_x \mu_y\big) \\ &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(\mu_x Y) - \mathrm{E}(\mu_y X) + \mu_x \mu_y \\ &= \mathrm{E}(XY) - \mu_x \mathrm{E}(Y) - \mu_y \mathrm{E}(X) + \mu_x \mu_y \\ &= \mathrm{E}(XY) - \mu_x \mu_y - \mu_y \mu_x + \mu_x \mu_y \\ &= \mathrm{E}(XY) - \mu_x \mu_y \\ &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)\end{aligned}$$

4. 確率変数 X と Y が独立のとき,

定理 4.6 より,

$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$

となるので,

$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$

を得る。

5. 相関係数 ρ_{xy} (P.58)：

$$\begin{aligned}\rho_{xy} &= \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}\sqrt{\mathrm{V}(Y)}} \\ &= \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}\end{aligned}$$

6. 確率変数 X と Y が独立のとき,

$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$

となるので,

$\rho_{xy} = 0$

を得る。

7. 確率変数 X, Y について,

$\mathrm{V}(X \pm Y) = \mathrm{V}(X) \pm 2\mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{V}(Y)$

証明：

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{V}(X \pm Y) \\
&= \mathrm{E}\Big(\big((X \pm Y) - \mathrm{E}(X \pm Y)\big)^2\Big) \\
&= \mathrm{E}\Big(\big((X - \mu_x) \pm (Y - \mu_y)\big)^2\Big) \\
&= \mathrm{E}\big((X - \mu_x)^2 \pm 2(X - \mu_x)(Y - \mu_y) \\
&\qquad + (Y - \mu_y)^2\big) \\
&= \mathrm{E}\big((X - \mu_x)^2\big) \\
&\pm 2\mathrm{E}\big((X - \mu_x)(Y - \mu_y)\big) \\
&+ \mathrm{E}\big((Y - \mu_y)^2\big) \\
&= \mathrm{V}(X) \pm 2\mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{V}(Y)
\end{aligned}
$$

8. $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$

証明：

次のような t に関する式を考える。

$f(t) = \mathrm{V}(xt - y)$

分散なので，必ずゼロ以上となる。よって，すべての t について，$f(t) \geq 0$ となるための条件を求めればよい。t に関する 2 次方程式の判別式がゼロ以下となる条件を求める。

$\mathrm{V}(xt - y)$

$= \mathrm{V}(xt) - 2\mathrm{Cov}(xt, y) + \mathrm{V}(y)$

$= t^2\mathrm{V}(x) - 2t\mathrm{Cov}(x, y) + \mathrm{V}(y)$

$\dfrac{D}{2} = \big(\mathrm{Cov}(x, y)\big)^2 - \mathrm{V}(x)\mathrm{V}(y) \leq 0$

$\dfrac{\big(\mathrm{Cov}(x, y)\big)^2}{\mathrm{V}(x)\mathrm{V}(y)} \leq 1$

$-1 \leq \dfrac{\mathrm{Cov}(x, y)}{\sqrt{\mathrm{V}(x)}\sqrt{\mathrm{V}(y)}} \leq 1$

$-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$

ρ_{xy} が 1 に近いほど，正の相関が強くなる。

ρ_{xy} が -1 に近いほど，負の相関が強くなる。

9. 確率変数 X と Y が独立のとき，

定理 4.8 (P.59)： $\mathrm{V}(X + Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y)$

証明：

$\mathrm{V}(X + Y) = \mathrm{V}(X) + 2\mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{V}(Y)$

確率変数 X と Y が独立のとき，

$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$

なので，

$\mathrm{V}(X + Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y)$

を得る。

10. n 個の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立で同じ平均 μ，分散 σ^2 を持つとする。すなわち，すべての $i = 1, 2, \cdots, n$ について，

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu, \quad \mathrm{V}(X_i) = \sigma^2$$

を仮定する。

さらに，算術平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ を考える。

このとき，

定理 4.9 (P.59)： $\mathrm{E}(\overline{X}) = \mu$, $\mathrm{V}(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$

が成り立つ。

証明：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\overline{X}) &= \mathrm{E}(\sum_i \frac{X_i}{n}) \\
&= \sum_i \mathrm{E}(\frac{X_i}{n}) \quad \longleftarrow \text{ 定理 4.5 (P.57)} \\
&= \sum_i \frac{1}{n}\mathrm{E}(X_i) \quad \longleftarrow \text{ 定理 4.1 (P.51)} \\
&= \sum_i \frac{1}{n}\mu \\
&= \mu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(\overline{X}) &= \mathrm{V}(\sum_i \frac{X_i}{n}) \\
&= \sum_i \mathrm{V}(\frac{X_i}{n}) \quad \longleftarrow \text{ 定理 4.8 (P.59)} \\
&= \sum_i \frac{1}{n^2}\mathrm{V}(X_i) \quad \longleftarrow \text{ 定理 4.3 (P.52)} \\
&= \sum_i \frac{1}{n}^2 \sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}
$$

例題 4.1 (P.59)： 2 つの離散型確率変数 X, Y の同時確率分布は,

$X \setminus Y$	0	1
1	c	0.3
2	0.2	0.1

とする。

1. c の値は？

   $c+0.3+0.2+0.1=1$ により，$c=0.4$

2. X と Y の周辺分布は,

$X \setminus Y$	0	1	X の周辺分布
1	c	0.3	0.7
2	0.2	0.1	0.3
Y の周辺分布	0.6	0.4	1.0

   となる。

3. X の周辺分布の平均と分散は？

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \sum_i \sum_j x_i p_{ij} \\ &= \sum_i x_i p_{i\cdot} \\ &= 1 \times 0.7 + 2 \times 0.3 \\ &= 1.3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}\big((X-\mu_x)^2\big) \\ &= \mathrm{E}(X^2) - \mu_x^2 \\ &= \sum_i \sum_j x_i^2 p_{ij} - \mu_x^2 \\ &= \sum_i x_i^2 p_{i\cdot} - \mu_x^2 \\ &= 1^2 \times 0.7 + 2^2 \times 0.3 - 1.3^2 \\ &= 0.21\end{aligned}$$

4. $Y=0$ が与えられたときの X の条件付き分布は？

$$\begin{aligned}P(X=1|Y=0) &= \frac{P(X=1, Y=0)}{P(Y=0)} \\ &= \frac{0.4}{0.6} \\ &= \frac{2}{3} \\ P(X=2|Y=0) &= \frac{P(X=2, Y=0)}{P(Y=0)} \\ &= \frac{0.2}{0.6} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

5. $Z=X+Y$ のときの Z の確率分布は？

$$\begin{aligned}P(Z=1) &= P(X=1, Y=0) \\ &= 0.4 \\ P(Z=2) &= P(X=1, Y=1) \\ &\quad + P(X=2, Y=0) \\ &= 0.3 + 0.2 = 0.5 \\ P(Z=3) &= P(X=2, Y=1) \\ &= 0.1\end{aligned}$$

   よって，Z の確率分布は,

Z	1	2	3	計
$P(Z)$	0.4	0.5	0.1	1

   となる。

6. Y の周辺分布の平均と分散は？

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y) &= \sum_i \sum_j y_j p_{ij} \\ &= \sum_j y_j p_{\cdot j} \\ &= 0 \times 0.6 + 1 \times 0.4 \\ &= 0.4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(Y) &= \mathrm{E}\big((Y-\mu_y)^2\big) \\ &= \mathrm{E}(Y^2) - \mu_y^2 \\ &= \sum_i \sum_j y_j^2 p_{ij} - \mu_y^2 \\ &= \sum_j y_j^2 p_{\cdot j} - \mu_y^2 \\ &= 0^2 \times 0.6 + 1^2 \times 0.4 - 0.4^2 \\ &= 0.24\end{aligned}$$

7. X と Y の共分散は？

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}\big((X-\mu_x)(Y-\mu_y)\big)\\ &= \mathrm{E}(XY)-\mu_x\mu_y\\ &= \sum_i\sum_j x_iy_jp_{ij}-\mu_x\mu_y\\ &= 1\times 0\times 0.4+1\times 1\times 0.3\\ &+ 2\times 0\times 0.2+2\times 1\times 0.1\\ &- 1.3\times 0.4\\ &= -0.02\end{aligned}$$

8. X と Y の相関係数は？

$$\begin{aligned}\rho_{xy} &= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}\sqrt{\mathrm{V}(Y)}}\\ &= \frac{-0.02}{\sqrt{0.21}\sqrt{0.24}}\\ &= -0.089\end{aligned}$$

5　正規分布と正規分布表 (P.65)

確率変数

- 離散型確率変数 $\Longrightarrow$ 2 項分布，$\cdots$
- 連続型確率変数 $\Longrightarrow$ 正規分布，カイ 2 乗 (χ^2) 分布，t 分布，$\cdots$

5.1　正規分布の特性 (P.65)

正規分布の確率密度関数 $f(x)$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)$$

ただし，$\exp(x)=e^x$ とする。$\pi=3.141592$ (円周率)，$e=2.718282$ (自然対数の底) に注意。

$$\mathrm{E}(X)=\mu,\quad \mathrm{V}(X)=\sigma^2$$

$\Longrightarrow$ 平均 μ，分散 σ^2 の正規分布
$\Longrightarrow N(\mu,\sigma^2)$
確率変数 X が正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従う
$\Longrightarrow X\sim N(\mu,\sigma^2)$
正規分布の確率密度関数 $\Longrightarrow$ 図 5.1
性質：

1. $x=\mu$ に関して左右対称
2. 正規分布の平均，メディアン (中央値)，モード (最頻値) はすべて等しく μ
3. 下側の面積の合計は 1 $\Longrightarrow$ 連続型確率密度関数の性質

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$$

$N(0,1)\Longrightarrow$ 標準正規分布
重要：
$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ とする。このとき，基準化 (標準化) すると，$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ となる。(P.52 の定理 4.4 を参考に)
重要：
$X_1,X_2,\cdots,X_n$ は互いに独立で，X_i は平均 μ，分散 σ^2 の正規分布に従うとする。
このとき，$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$ となる。(P.59，定理 4.9 を参考に)
さらに，基準化 (標準化) すると，$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ となる。

5.2　正規分布表の使い方 (P.67)

分布関数 $F(x)$

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$$

$f(t)$ が正規分布の確率密度関数のとき，積分の計算は手計算は不可能
$\Longrightarrow$ 正規分布表 (P.68, P.245) の利用
正規分布表 (P.68, P.245) $\Longrightarrow$ 標準正規分布 $N(0,1)$ の確率を求める
$Z\sim N(0,1)$ について，

$$P(Z>1.96)=?$$

正規分布表では，標準正規分布 $N(0,1)$ の上側確率が計算されている。
上側確率： Z がある値 z より大きくなる確率 $P(Z>z)$
$P(Z>z)=\alpha$ となるとき，z のことを 100α % 点という。
$P(|Z|>z)=\alpha$ を両側確率と呼ぶ。
$P(|Z|>z)=\alpha$ となるとき，z のことを $100\alpha/2$ % 点という。
$P(Z>1.96)=0.0250$

例題 5.1 (P.68)： $P(Z \geq 1.64) = P(Z > 1.64) = 0.0505$

例題 5.2 (P.69)： $P(Z < 1.96) = 1 - P(Z \geq 1.96) = 1 - 0.0250 = 0.9750$

例題 5.3 (P.69)： $P(Z < -1.96) = P(Z > 1.96) = 0.0250$

例題 5.4 (P.69)： $P(-1.96 < Z < 1.64)$
$= 1 - P(Z > 1.64) - P(Z > 1.96)$
$= 1 - 0.0505 - 0.0250 = 0.9245$

例題 5.5 (P.70)： $P(0.25 < Z < 1.96)$
$= P(Z > 0.25) - P(Z > 1.96)$
$= 0.4013 - 0.0250 = 0.3763$

例題 5.6 (P.71)： $X \sim N(5, 2^2)$ のとき，$P(6 < X < 8) = ?$

解答： $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ を利用する。
$Z = \dfrac{X-5}{2} \sim N(0,1)$ なので，
$P(6 < X < 8)$
$= P(\dfrac{6-5}{2} < \dfrac{X-5}{2} < \dfrac{8-5}{2})$
$= P(0.5 < Z < 1.5)$
$= P(Z > 0.5) - P(Z > 1.5)$
$= 0.3085 - 0.0668 = 0.2417$

例題 5.7 (P.71)： ある会社の従業員の通勤時間は平均 60 分，標準偏差 15 分の正規分布にしたがっている。この会社の 2.5 % の従業員が通勤時間の長さに不満を持っている。不満を持っている従業員の通勤時間は何分以上か？

解答： 従業員の通勤時間を X とする。
$X \sim N(60, 15^2)$
$Z = \dfrac{X-60}{15}$ とすると，
$Z \sim N(0,1)$
$P(Z > z) = 0.0250$ を満たす z は 1.96 なので，
$P(Z > 1.96) = 0.0250$
$\Longrightarrow P(\dfrac{X-60}{15} > 1.96) = 0.0250$
$\Longrightarrow P(X > 89.4) = 0.0250$

したがって，89.4 分以上の通勤時間の従業員が不満を持っていることになる。

問題 5.1 (P.72)： $Z \sim N(0,1)$

1. $P(Z \geq 1.57) = 0.0582$
2. $P(Z < 1.34)$
   $= 1 - P(Z > 1.34)$
   $= 1 - 0.0901 = 0.9099$
3. $P(-0.37 < Z \leq 1.6)$
   $= 1 - P(Z > 0.37) - P(Z > 1.6)$
   $= 1 - 0.3557 - 0.0548 = 0.5895$
4. $P(0.55 < Z < 1.67)$
   $= P(Z > 0.55) - P(Z > 1.67)$
   $= 0.2912 - 0.0475 = 0.2437$
5. $P(-2.08 < Z < -0.21)$
   $= P(0.21 < Z < 2.08)$
   $= P(Z > 0.21) - P(Z > 2.08)$
   $= 0.4168 - 0.0188 = 0.3980$

問題 5.2 (P.72)： $X \sim N(2, 9)$,
i.e., $X \sim N(2, 3^2)$,
i.e., $Z = \dfrac{X-2}{3} \sim N(0,1)$

1. $P(X \geq 5.6)$
   $= P(\dfrac{X-2}{3} \geq \dfrac{5.6-2}{3})$
   $= P(Z < 1.2)$
2. $P(X < 10)$
   $= P(\dfrac{X-2}{3} < \dfrac{10-2}{3})$
   $= P(Z < 2.67)$
3. $P(1 < X \leq 4.7)$
   $= P(\dfrac{1-2}{3} < \dfrac{X-2}{3} \leq \dfrac{4.7-2}{3})$
   $= P(-0.33 < Z < 0.9)$

4. $P(3.2 < X < 7.7)$
$= P(\frac{3.2-2}{3} < \frac{X-2}{3} < \frac{7.7-2}{3})$
$= P(0.4 < Z < 1.9)$

5. $P(-1.3 < X < 1.19)$
$= P(\frac{-1.3-2}{3} < \frac{X-2}{3} < \frac{1.19-2}{3})$
$= P(-1.1 < Z < -0.27)$

6　標本分布 (P.75)

統計分析の目的：
分析の対象とされている集団の特性を，そこから取り出されたデータ（標本）を用いて，引き出すこと。

- 分析の対象とされている集団 $\Longrightarrow$ 母集団
- 分析の対象とされている集団の特性 $\Longrightarrow$ 平均, 分散, ⋯
- そこから取り出されたデータ $\Longrightarrow$ 標本

母集団から標本を取り出すこと $\Longrightarrow$ 標本抽出
問題： 標本抽出の方法 $\Longrightarrow$ 無作為抽出
作為なく抽出された標本 $\Longrightarrow$ 無作為標本
無作為標本に基づいて，母集団に関する特性を統計的に推論すべき。

母集団から取り出された無作為標本が n 個の要素から成る。
$\Longrightarrow$ n を標本の大きさと呼ぶ。
重要：
n 個の要素から成る標本を確率変数とみなす。
確率変数： $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$
その実現値： $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $\Longrightarrow$ 個々の要素は数値
無作為標本 $\Longrightarrow$ n 個 の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立。
大きさ n の無作為標本から求められる平均 $\Longrightarrow$ 標本平均 $\overline{X}$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

大きさ n の無作為標本から求められる不偏分散 $\Longrightarrow$ 標本不偏分散 S^2

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

n でなく $n-1$ で割る理由，不偏の意味は後述 (P.95)

一般に，標本の要素の関数 $\Longrightarrow$ 統計量 T

$$T = f(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

例： 標本平均 $\overline{X}$，標本不偏分散 S^2
統計量の分布 $\Longrightarrow$ 標本分布
問題：
標本平均の標本分布は？
標本不偏分散の標本分布は？

6.1　標本平均の標本分布 (P.77)

無作為標本を構成する要素： $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$
$X_1, X_2, \cdots, X_n$ はそれぞれ独立に同じ分布従う確率変数と考える。
すなわち，すべての $i = 1, 2, \cdots, n$ について，

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu, \quad \mathrm{V}(X_i) = \sigma^2$$

となる。標本平均 $\overline{X}$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

を考えよう。

(1) 定理 4.9 (P.59) から，標本平均 $\overline{X}$ の平均と分散は，

$$\mathrm{E}(\overline{X}) = \mu, \quad \mathrm{V}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

によって与えられる。

(2) すべての i について，$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき，標本平均 $\overline{X}$ の分布は,

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

すなわち,「平均 μ，分散 $\frac{\sigma^2}{n}$ の正規分布」となる。
(P.66 の最後の段落，P.80 の 6.3 節の直前)

(3) $\mathrm{E}(\overline{X}) = \mu$，$\mathrm{V}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ なので,
標本平均 $\overline{X}$ の標準化 (基準化) を行う (定理4.4，P.52)。

$$Z_n = \frac{\overline{X} - \mathrm{E}(\overline{X})}{\sqrt{\mathrm{V}(\overline{X})/n}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

表 1: 正規分布表 $N(0,1)$： P.68, 245

$$\alpha = \mathrm{Prob}(Z > z_\alpha) = \int_{z_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}x^2)\mathrm{d}x$$

z_α	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4841	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4091	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.3946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2644	.2611	.2579	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2297	.2266	.2236	.2207	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1563	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1094	.1075	.1057	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0722	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0390	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0352	.0344	.0333	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
2.4	.0082	.0080	.0078	.0076	.0073	.0071	.0070	.0068	.0066	.0064
2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0042	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002

α	.10	.05	.025	.010	.005
z_α	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758

このとき，標本の大きさ n が大きくなるにつれて (大標本のとき)，標本平均 $\overline{X}$ の分布は,

$$Z_n \sim N(0,1)$$

となる。$\Longrightarrow$ **定理 6.1 中心極限定理 (P.81)**

n の大きさにかかわらず，$\mathrm{E}(Z_n)=0$，$\mathrm{V}(Z_n)=1$ に注意。

n が大きくなるにつれて，Z_n は正規分布に近づくということがポイント。

注意点)：
(1), (2) $\Longrightarrow$ 標本の大きさ n に無関係
(3) $\Longrightarrow$ 標本の大きさ n が大きいときにのみ成立
(1), (3) $\Longrightarrow$ 標本の要素 X_i の分布は必要なし (離散型・連続型共に成立)
(2), (3) $\Longrightarrow$ 標本平均 $\overline{X}$ の分布は正規分布

問題 6.3 (P.90)： 一世帯当たりの純金融資産残高は，過去の調査から，平均 480 万円，標準偏差 320 万円の正規分布であると仮定する。64 世帯を無作為抽出したとき，その標本平均が 450 万円以上 500 万円以下である確率は？

解答： すべての i について，$X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$ のとき，
$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
$\mu=320$, $\sigma^2=320^2$, $n=64$
$P(450 \le \overline{X} \le 500)$ を求める。

$$\begin{aligned}
&P(450 \le \overline{X} \le 500)\\
&= P\Big(\frac{450-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{500-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\Big)\\
&= P\Big(\frac{450-480}{320/\sqrt{64}} \le Z \le \frac{500-480}{320/\sqrt{64}}\Big)\\
&= P(-0.75 \le Z \le 0.5)\\
&= 1 - P(Z > 0.75) - P(Z > 0.5)\\
&= 1 - 0.3085 - 0.2266 = 0.4649
\end{aligned}$$

例題 6.1 (P.81)： A 市の家計の年間所得は，過去からの調査で，平均 550 万円，標準偏差 250 万円である。100 世帯の標本抽出で，その平均所得が 600 万円を越える確率は？

解答： 母平均 $\mu=550$,
母分散 $\sigma^2=250^2$,
標本の大きさ $n=100$
標本平均 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$
標準化 $Z_n=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$
n が大きいとき，$Z_n \sim N(0,1) \Longrightarrow$ 定理 6.1
$P(\overline{X} > 600)$ を求める。

$$\begin{aligned}
P(\overline{X} > 600) &= P\Big(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{600-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\Big)\\
&= P\Big(Z_n > \frac{600-550}{250/\sqrt{100}}\Big)\\
&= P(Z_n > 2) = 0.0228
\end{aligned}$$

100 世帯の平均所得が 600 万円を越える確率は 2.28 % である。

6.2 正規母集団からの標本分布 (P.82)

母集団の確率分布が正規分布であるという仮定のもとで，標本平均や標本不偏分散の標本分布を考える。
母集団の確率分布が正規分布 $\Longrightarrow$ 正規母集団

すべての $i=1,2,\cdots,n$ について，$X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$ で，
しかも，X_1, X_2, $\cdots$, X_n は互いに独立である
と仮定する。

1. **定理 6.2 (P.83)：** このとき，

   $$U=\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\Big)^2 \sim \chi^2(n)$$

   自由度 n のカイ 2 乗分布： $\chi^2(n)$

2. **定理 6.3 (P.83)：** μ を $\overline{X}$ で置き換えると,

   $$U=\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\Big)^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

   ただし，$S^2=\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ (標本不偏分散) とする。

   $\Longrightarrow$ 標本不偏分散の標本分布

表 2: χ^2 分布表 $\chi^2(k)$： P.246

$$\alpha = \mathrm{Prob}(U > \chi^2_\alpha) = \int_{\chi^2_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} x^{\frac{k}{2}-1}\exp(-\frac{1}{2}x)\mathrm{d}x$$

α	.995	.99	.975	.95	.90	.10	.05	.025	.010	.005
k										
1	.000	.000	.001	.004	.016	2.706	3.842	5.024	6.635	7.879
2	.010	.020	.051	.103	.211	4.605	5.992	7.378	9.210	10.597
3	.072	.115	.216	.352	.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	.207	.297	.484	.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	.412	.554	.831	1.146	1.610	9.236	11.071	12.833	15.086	16.750
6	.676	.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.054	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.820
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.719
18	6.265	7.015	8.231	9.391	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.157
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.543	10.982	12.338	14.042	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.173	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.653	40.647	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.257	16.047	17.708	19.768	39.088	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.954	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	14.458	15.656	17.539	19.281	21.434	41.422	44.985	48.232	52.191	55.003
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	15.815	17.074	19.047	20.867	23.110	43.745	47.400	50.725	54.776	57.648
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275
36	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	47.212	50.999	54.437	58.619	61.581
37	18.586	19.960	22.106	24.075	26.492	48.363	52.192	55.668	59.893	62.883
38	19.289	20.691	22.879	24.884	27.343	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181
39	19.996	21.426	23.654	25.695	28.196	50.660	54.572	58.120	62.428	65.476
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.759	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.535	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.392	64.278	96.578	101.880	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.930	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.170

カイ 2 乗分布 $\Longrightarrow$ 形状は自由度に依存する (図 6.1, P.84)
そのため，上側確率 0.995, 0.990, 0.975, 0.950, 0.050, 0.025, 0.010, 0.005 の値のみが付表になっている。
自由度もいくつか限定されている。
例： $U \sim \chi^2(5)$ のとき，$P(U > 11.0705) = 0.05 \Longrightarrow$ 付表 2 (P.246)，図 6.2 (P.84)

例題 6.3 (P.84)： 家計の年間所得は正規分布と仮定する。母集団から 17 人を選び，標本不偏分散を計算した。標本不偏分散が母分散の 2 倍を越えない確率は？

解答： $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ を利用して，$P(S^2 < 2\sigma^2)$ を求めたい。

$$\begin{aligned} P(S^2 < 2\sigma^2) &= P\Big(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < 2(n-1)\Big) \\ &= P(U < 32) \end{aligned}$$

この場合，$n = 17$ なので，自由度は $n - 1 = 16$ となるので，
$U \sim \chi^2(16)$
から確率を求める。
$P(U < 32) = 1 - P(U > 32) = 1 - 0.010 = 0.990$

1. **定理 6.4 (P.86)：**

   $Z \sim N(0,1)$,

   $U \sim \chi^2(k)$,

   Z と U が独立

   このとき，

   $$T = \frac{Z}{\sqrt{U/k}} \sim t(k)$$

   自由度 k の t 分布： $t(k)$

t 分布 $\Longrightarrow$ 形状は自由度に依存する (図 6.3, P.87)
そのため，上側確率 0.10, 0.05, 0.025, 0.010, 0.005 の値のみが付表 3 になっている。
自由度もいくつか限定されている。
正規分布より裾野の広い分布 (図 6.3)
k が大きくなると，$t(k)$ は $N(0,1)$ に近づく。
$\Longrightarrow$ 付表 3 (P.247) の $m = \infty$ の数値を付表 1 の下の表 (P.245) と比較
例： $T \sim t(10)$ のとき，

表 3: t 分布表 $t(m)$： P.247

$$\alpha = P(T > t_\alpha) = \int_{t_\alpha}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{1}{\sqrt{m\pi}} \frac{1}{(1+\frac{x^2}{m})^{\frac{m+1}{2}}} \mathrm{d}x$$

α / m	.10	.05	.025	.010	.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
31	1.309	1.696	2.040	2.453	2.744
32	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738
33	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733
34	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
35	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
36	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719
37	1.305	1.687	2.026	2.431	2.715
38	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712
39	1.304	1.685	2.023	2.426	2.708
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
41	1.303	1.683	2.020	2.421	2.701
42	1.302	1.682	2.018	2.418	2.698
43	1.302	1.681	2.017	2.416	2.695
44	1.301	1.680	2.015	2.414	2.692
45	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690
46	1.300	1.679	2.013	2.410	2.687
47	1.300	1.678	2.012	2.408	2.685
48	1.299	1.677	2.011	2.407	2.682
49	1.299	1.677	2.010	2.405	2.680
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
80	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
240	1.285	1.651	1.970	2.342	2.596
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

$P(|T| > 3.169) = 0.01 \Longrightarrow$ 付表 3 (P.247)，図 6.4 (P.87)

すべての $i = 1, 2, \cdots, n$ について，$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ で，
しかも，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立である
と仮定する。

1. **定理 6.5：標本平均の標本分布 (P.86)：**

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

自由度 $n-1$ の t 分布

ただし，

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

とする。

証明：

すべての $i = 1, 2, \cdots, n$ について，$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ で，

しかも，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立である

と仮定すると，

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

となる。標準化によって，

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

を得る。

一方，定理 6.3 (P.83) から，

$$U = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

となる。

Z と U は独立となる。(証明略)

したがって，

$$\begin{aligned} T &= \frac{Z}{\sqrt{U/(n-1)}} \sim t(n-1) \\ &= \frac{\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/ n-1}} \\ &= \frac{\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\dfrac{S}{\sigma}} \\ &= \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \end{aligned}$$

なので，

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

を得る。

まとめ，

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \qquad \Longrightarrow \text{(5.4) あたり (P.66)}$$

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \qquad \Longrightarrow \text{定理 6.5 (P.86)}$$

7 推定 (P.93)

ある母集団から標本数 n の独立な標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が抽出されたとき，これを用いて母数 (パラメータ) に対する統計的推測を行うことができる。
母平均 μ，母分散 σ^2 のような母集団の特性を表すものを母数 (パラメータ) と呼ぶ。
統計的推測とは，

1. 推定 (特に，点推定と呼ぶ) $\Longrightarrow$ 母数をある一つの値で推定すること
2. 区間推定 $\Longrightarrow$ 母数の値がある区間内にあるとして区間を推定すること
3. 仮説検定

から成る。

1. 理論標本，理論観測値

   $\Longrightarrow X_1, X_2, \cdots, X_n$

2. 実現された標本，実現された観測値，実現値

   $\Longrightarrow x_1, x_2, \cdots, x_n$

7.1 統計量，推定量，推定値 (P.94)

1. 理論観測値 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の関数 $\Longrightarrow$ 統計量
2. 母数の推定に使われる統計量 $\Longrightarrow$ μ の推定量
   (a) $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ は μ の推定量
   (b) $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ は σ^2 の推定量
3. 実現された標本を用いて実際に計算された推定量の値 $\Longrightarrow$ 推定値
   (a) $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ は μ の推定値
   (b) $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ は σ^2 の推定値
4. μ や σ^2 の推定量の候補は無数に考えられる。

7.2 推定量の望ましい性質 (P.95)

1. 不偏性 (P.95)：

   ある母集団のある母数 θ に対して，θ の推定量として $\widehat{\theta}$ を考える。

   (すなわち，$\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ となる)

   このとき，

   $$\mathrm{E}(\widehat{\theta}) = \theta$$

   となるとき，$\widehat{\theta}$ は θ の不偏推定量であると言う。

   $\widehat{\theta}$ は不偏性を持つと言う。

   $\mathrm{E}(\widehat{\theta}) - \theta$ は偏りと定義される。

   (a) 不偏推定量の実現値を不偏推定値と呼ぶ。
   $\widehat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n) \Longrightarrow$ 不偏推定量
   $\widehat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \Longrightarrow$ 不偏推定値

   (b) 標本平均 $\overline{X}$ は μ の不偏推定量である。

   証明：

   $$\begin{aligned}\mathrm{E}(\overline{X}) &= \mathrm{E}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu\\ &= \mu\end{aligned}$$

   このように，$\mathrm{E}(\overline{X}) = \mu$ なので，標本平均 $\overline{X}$ は μ の不偏推定量となる。

   (c) 標本分散 S^2 は σ^2 の不偏推定量である。

   証明：

   準備として，以下の計算を行う。

   $$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}\Big((X_i-\mu) - (\overline{X}-\mu)\Big)^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)(\overline{X}-\mu) + \sum_{i=1}^{n}(\overline{X}-\mu)^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - 2(\overline{X}-\mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) + \sum_{i=1}^{n}(\overline{X}-\mu)^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - 2n(\overline{X}-\mu)^2 + n(\overline{X}-\mu)^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - n(\overline{X}-\mu)^2\end{aligned}$$

   途中で，$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) = n(\overline{X}-\mu)$ に注意せよ。

   上の式を代入して，計算すると，

   $$\begin{aligned}&\mathrm{E}(S^2)\\ &= \mathrm{E}(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2)\\ &= \frac{1}{n-1}\mathrm{E}\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\Big)\\ &= \frac{1}{n-1}\mathrm{E}\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - n(\overline{X}-\mu)^2\Big)\\ &= \frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i-\mu)^2 - n\mathrm{E}(\overline{X}-\mu)^2\Big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n}\Big) \\
&= \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 - \sigma^2) \\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$

となる。途中で，$\mathrm{E}(X_i - \mu)^2 = \sigma^2$, $\mathrm{E}(\overline{X} - \mu)^2 = \sigma^2/n$ (定理 4.9，P.59) に注意せよ。

このように，$\mathrm{E}(S^2) = \sigma^2$ なので，標本分散 S^2 は σ^2 の不偏推定量となる。

2. 一致性 (P.96)：

ある母数 θ について推定量 $\widehat{\theta}$ を考える。n 個の標本から構成された推定量を $\widehat{\theta}^{(n)}$ と定義する。

数列 $\widehat{\theta}^{(1)}, \widehat{\theta}^{(2)}, \cdots, \widehat{\theta}^{(n)}, \cdots$ を考える。

十分大きな n について，$\widehat{\theta}^{(n)}$ が θ に確率的に収束するとき，$\widehat{\theta}$ は θ の一致推定量であると言う。

$$
\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \widehat{\theta} = \theta
$$

と表現する。

(a) $\widehat{\theta}$ が θ 一致推定量であるための一つの十分条件は,

$$
\mathrm{E}(\widehat{\theta}) = \theta
$$

$$
\lim_{n\to\infty} \mathrm{V}(\widehat{\theta}) = 0
$$

が成り立つことである。

(b) μ の推定量 $\overline{X}$ を調べる。

$$
\mathrm{E}(\overline{X}) = \mu
$$

$$
\mathrm{V}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}
$$

となる。$n \to \infty$ のとき,

$$
\mathrm{V}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \longrightarrow 0
$$

となるので，$\overline{X}$ は μ の一致推定量であると言える。

3. 有効性 (P.98)：

ある母数 θ に対して，$\widehat{\theta}_1$ と $\widehat{\theta}_2$ の 2 つの不偏推定量を考える。

このとき，$\mathrm{V}(\widehat{\theta}_1) < \mathrm{V}(\widehat{\theta}_2)$ が成り立つとき，$\widehat{\theta}_1$ は $\widehat{\theta}_2$ より有効であると言う。

ある母数 θ に対して，可能なすべての不偏推定量を考え，$\widehat{\theta}$ が最も小さな分散を持つ不偏推定量であるとする ($\widehat{\theta}$ を θ の不偏推定量の中で最も小さい分散を持つ推定量とする)。

このとき，$\widehat{\theta}$ を有効推定量 (最小分散不偏推定量) と言う。

(a) 簡単化のために $n = 3$ の場合を考える。

X_1, X_2, X_3 は互いに独立に平均 μ，分散 σ^2 の正規分布に従うと仮定する。

すなわち，$i = 1, 2, 3$ について，$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

μ の推定量を 2 つ考える。

$$
\begin{aligned}
\overline{X} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\
&= \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3 \\
\widetilde{X} &= \frac{1}{4}X_1 + \frac{2}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3
\end{aligned}
$$

不偏性のチェック：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\overline{X}) &= \frac{1}{3}\mathrm{E}(X_1) + \frac{1}{3}\mathrm{E}(X_2) + \frac{1}{3}\mathrm{E}(X_3) \\
&= \frac{1}{3}\mu + \frac{1}{3}\mu + \frac{1}{3}\mu \\
&= \mu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\widetilde{X}) &= \frac{1}{4}\mathrm{E}(X_1) + \frac{2}{4}\mathrm{E}(X_2) + \frac{1}{4}\mathrm{E}(X_3) \\
&= \frac{1}{4}\mu + \frac{2}{4}\mu + \frac{1}{4}\mu \\
&= \mu
\end{aligned}
$$

よって，$\overline{X}$, $\widetilde{X}$ 共に μ の不偏推定量である。

分散は,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(\overline{X}) &= \mathrm{V}(\frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3) \\
&= \mathrm{V}(\frac{1}{3}X_1) + \mathrm{V}(\frac{1}{3}X_2) + \mathrm{V}(\frac{1}{3}X_3) \\
&= \frac{1}{9}\mathrm{V}(X_1) + \frac{1}{9}\mathrm{V}(X_2) + \frac{1}{9}\mathrm{V}(X_3) \\
&= \frac{1}{9}\sigma^2 + \frac{1}{9}\sigma^2 + \frac{1}{9}\sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(\widetilde{X}) &= \mathrm{V}(\frac{1}{4}X_1 + \frac{2}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3) \\
&= \mathrm{V}(\frac{1}{4}X_1) + \mathrm{V}(\frac{2}{4}X_2) + \mathrm{V}(\frac{1}{4}X_3) \\
&= \frac{1}{16}\mathrm{V}(X_1) + \frac{4}{16}\mathrm{V}(X_2) + \frac{1}{16}\mathrm{V}(X_3) \\
&= \frac{1}{16}\sigma^2 + \frac{4}{16}\sigma^2 + \frac{1}{16}\sigma^2 \\
&= \frac{6}{16}\sigma^2
\end{aligned}
$$

したがって，$\mathrm{V}(\overline{X}) < \mathrm{V}(\widetilde{X})$ となり，$\overline{X}$ が $\widetilde{X}$ より有効であることが分かる。

(b) ある母集団から標本数 n の独立な標本 X_1, X_2, $\cdots$, X_n は，それぞれ，平均 μ，分散 σ^2 の分布を持つものとする。
$\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ は最も小さな分散を持つ不偏推定量となる。
$\Longrightarrow$ 有効推定量

母平均 μ の推定量である標本平均 $\overline{X}$ は，不偏性，一致性，有効性という 3 つの望ましい性質を持っている。

7.3 区間推定 (P.99)

4 つの区間推定

1. 母平均 μ の区間推定
   (a) 正規母集団の場合
   - 母分散が既知
   - 母分散が未知

   (b) 正規母集団でない場合 (大標本，すなわち，n が大きいとき)
   - 母分散が既知
   - 母分散が未知
2. 母分散 σ^2 の区間推定 (正規母集団の場合) *** 時間に余裕がなければ省略 ***
3. 母比率の区間推定

7.3.1 平均の区間推定 (正規母集団，母分散が既知, P.99)

母分散 σ^2 が既知と仮定する。
$\Longrightarrow$ σ^2 を推定する必要なし。
$\Longrightarrow$ 正規分布の利用

大きさ n の無作為標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$
すべての $i = 1, 2, \cdots, n$ について，$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$，しかも，互いに独立と仮定する。
このとき，

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

したがって，標準化によって，

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

となる。
標準正規分布表 (P.245) から，α を与えたもとで，

$$P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

となる $z_{\alpha/2}$ の値を見つける。
例：
$\alpha = 0.05$ のとき，
$P(|Z| < 1.960) = 0.95$ により，$z_{\alpha/2} = 1.960$
$\alpha = 0.10$ のとき，
$P(|Z| < 1.645) = 0.90$ により，$z_{\alpha/2} = 1.645$

$$P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

$$P(\left|\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

$$P(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

母平均 μ が区間 $(\overline{X} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$ に含まれる確率は $1 - \alpha$ である。
区間 $(\overline{X} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$
$\Longrightarrow$ 信頼係数 (信頼度) $1 - \alpha$ の母平均 μ の信頼区間
$\overline{X} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\Longrightarrow$ 信頼区間の下限
$\overline{X} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\Longrightarrow$ 信頼区間の上限

実際には，推定量 $\overline{X}$ をその推定値 $\overline{x}$ で置き換える。
ただし，$\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ とする。

区間 $(\overline{x}-z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}+z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$ を信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間といい,
$\overline{x}-z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ を信頼下限,
$\overline{x}+z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ を信頼上限と呼ぶ。

例題 7.1 (P.101)： 正規母集団 $N(\mu,2^2)$ から大きさ 16 の標本をとって標本平均を計算したところ，$\overline{x}=3.2$ であった。信頼係数 0.95 の μ の信頼区間は？

解答： $Z\sim N(0,1)$ ，$\alpha=0.05$ のとき,
$P(|Z|>z_{\alpha/2})=1-\alpha$ となるので， $z_{\alpha/2}=1.96$ である。
$n=16$
信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間は $(\overline{x}-z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}+z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$ なので,
$(3.2-1.96\dfrac{2}{\sqrt{16}}, 3.2+1.96\dfrac{2}{\sqrt{16}})$,
すなわち，信頼係数 0.95 の μ の信頼区間は (2.22, 4.18) である。

問題 7.1 (P.108)： すべての $i=1,2,\cdots,n$ について, $X_i\sim N(\mu,3^2)$
標本の大きさ $n=25$
標本平均 $\overline{x}=8.2$
信頼係数 0.9, 0.95 の μ の信頼区間は？

解答： $Z\sim N(0,1)$ ，$\alpha=0.05$ のとき,
$P(|Z|>z_{\alpha/2})=1-\alpha$ となるので， $z_{\alpha/2}=1.96$ である。
$\alpha=0.10$ のとき,
$z_{\alpha/2}=1.645$ である。
信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間は $(\overline{x}-z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}+z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$ なので,
信頼係数 0.95 の μ の信頼区間は
$(8.2-1.96\dfrac{3}{\sqrt{25}}, 8.2+1.96\dfrac{3}{\sqrt{25}})$,
すなわち，(7.213, 9.187) である。
信頼係数 0.90 の μ の信頼区間は
$(8.2-1.645\dfrac{3}{\sqrt{25}}, 8.2+1.645\dfrac{3}{\sqrt{25}})$,
すなわち，(7.024, 9.376) である。

7.3.2 平均の区間推定 (正規母集団，母分散が未知, P.101)

母分散 σ^2 が未知と仮定する。
$\Longrightarrow \sigma^2$ を推定する必要あり。
$\Longrightarrow t$ 分布の利用

大きさ n の無作為標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$
すべての $i=1,2,\cdots,n$ について，$X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$，しかも，互いに独立と仮定する。
このとき,

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

となる。
σ^2 をその推定量 S^2 で置き換えると,

$$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

となる。(定理 6.5 P.86)
t 分布表 (P.247) から，n と α を与えたもとで,

$$P\big(|T|<t_{\alpha/2}(n-1)\big)=1-\alpha$$

となる $t_{\alpha/2}(n-1)$ の値を見つける。
例：
$n=11$, $\alpha=0.05$ のとき,
$P(|T|<2.228)=0.95$ により，$t_{\alpha/2}(10)=2.228$

$$P\big(|T|<t_{\alpha/2}(n-1)\big)=1-\alpha$$

$$P\Big(\Big|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\Big|<t_{\alpha/2}(n-1)\Big)=1-\alpha$$

$$P\big(\overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\big)=1-\alpha$$

母平均 μ が区間
$(\overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}})$ に含まれる確率は $1-\alpha$ である。
区間
$(\overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}})$
$\Longrightarrow$ 信頼係数 (信頼度) $1-\alpha$ の母平均 μ の信頼区間 (母分散未知の場合)
$\overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}} \Longrightarrow$ 信頼区間の下限

$\overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}} \Longrightarrow$ 信頼区間の上限

実際には，推定量 $\overline{X}$, S^2 をその推定値 $\overline{x}$, s^2 で置き換える。
ただし，$\overline{x}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$,
$s^2=\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$
とする。
区間 $(\overline{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}})$ を信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間といい，
$\overline{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}}$ を信頼下限，
$\overline{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}}$ を信頼上限と呼ぶ。

例題 7.2 (P.102)： 正規母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ から大きさ 9 の標本をとって標本平均と標本標準偏差を計算した。$\overline{x}=3.2$, $s=2.1$ であった。信頼係数 0.95 の μ の信頼区間は？

解答： $n=9$, $\alpha=0.05$ のとき，
$P\Big(\Big|\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\Big|<t_{\alpha/2}(n-1)\Big)=1-\alpha$
となるのは，$t_{\alpha/2}(n-1)=2.306$ である。
信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間は，
$(\overline{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}})$
となるので，
$(3.2-2.306\dfrac{2.1}{9},\ 3.2+2.306\dfrac{2.1}{9})$
を得る。
信頼係数 0.95 の μ の信頼区間は $(1.586,\ 4.814)$ である。

問題 7.2 (P.108)： 正規母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ から大きさ 12 の標本をとって標本平均と標本標準偏差を計算した。$\overline{x}=10.5$, $s=3.6$ であった。信頼係数 0.90, 0.95 の μ の信頼区間は？

解答： $n=12$ のとき，
$P\Big(\Big|\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\Big|<t_{\alpha/2}(n-1)\Big)=1-\alpha$
となるのは，$\alpha=0.10$ で $t_{\alpha/2}(n-1)=1.796$，$\alpha=0.05$ で $t_{\alpha/2}(n-1)=2.201$，である。
信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間は，
$(\overline{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}})$
となるので，
信頼係数 0.90 の μ の信頼区間は $(10.5-1.796\dfrac{3.2}{12},\ 10.5+1.796\dfrac{3.2}{12})$
すなわち，$(8.634,\ 12.366)$ を得る。
信頼係数 0.95 の μ の信頼区間は $(10.5-2.201\dfrac{3.2}{12},\ 10.5+2.201\dfrac{3.2}{12})$
すなわち，$(8.213,\ 12.787)$ を得る。

問題 7.4 (P.108)： GNP の対前年比が正規分布に従うと仮定して，その平均の信頼係数 0.9, 0.95 の信頼区間は？

解答： $n=13$ で，データから $\overline{x}$, s^2 を計算。

$$\begin{aligned}\overline{x}&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\\&=\frac{1}{13}(2.7+4.8+5.3+5.2+5.3+4.3\\&\quad+3.7+3.1+3.2+5.1+4.9+2.5+4.5)\\&=4.2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s^2&=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\\&=\frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2\Big)\\&=\frac{1}{12}\Big((2.7^2+4.8^2+5.3^2+5.2^2+5.3^2+4.3^2\\&\quad+3.7^2+3.1^2+3.2^2+5.1^2+4.9^2+2.5^2+4.5^2)\\&\quad-13\times4.2^2\Big)\\&=1.065\end{aligned}$$

$s=1.032$
$n=13$ のとき，
$\alpha=0.10$ で $t_{\alpha/2}(n-1)=1.782$,
$\alpha=0.05$ で $t_{\alpha/2}(n-1)=2.179$,
である。
信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間は，
$(\overline{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}})$
となるので，
信頼係数 0.90 の μ の信頼区間は
$(4.2-1.782\dfrac{1.032}{13},\ 4.2+1.782\dfrac{1.032}{13})$
すなわち，$(3.690,\ 4.710)$ を得る。

信頼係数 0.95 の μ の信頼区間は
$(4.2 - 2.179\dfrac{1.032}{13},\ 4.2 + 2.179\dfrac{1.032}{13})$
すなわち，(3.576, 4.824) を得る。

母平均 μ の区間推定 (非正規母集団，大標本のとき): n が大きいとき，正規近似 $\Longrightarrow$ 中心極限定理 (定理 6.1, P.81)

(中心極限定理の復習)
大きさ n の無作為標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$
すべての i について，$\mathrm{E}(X_i) = \mu$，$\mathrm{V}(X_i) = \sigma^2$ とする。
標本平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ を考える。
n が大きいとき ($n \geq 100$),

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \longrightarrow N(0,1)$$

を得る。これは,

$$\frac{\overline{X} - \mathrm{E}(\overline{X})}{\sqrt{\mathrm{V}(\overline{X})}} \longrightarrow N(0,1)$$

とも書き直すことが出来る。
(X_i の分布の形状を必要としないというところがポイント)

(注意)
$\overline{X}$ の平均，分散は,

$$\mathrm{E}(\overline{X}) = \mu, \qquad \mathrm{V}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

となる。$\Longrightarrow$ 定理 4.9 (P.59)

- **母分散 σ^2 が既知のとき：**

  n が大きいとき ($n \geq 100$),

  $$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \longrightarrow N(0,1)$$

  なので，$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ とすると，近似的に,

  $$P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

  となり,

  $$P(|\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

  を得る。

  したがって,

  $$P(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

  $\overline{X}$ を $\overline{x}$ で置き換えて，信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間は,

  $$P(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

  が近似的に用いられる。

- **母分散 σ^2 が未知のとき：**

  さらに，n が大きいとき ($n \geq 100$)，母分散 σ^2 をその不偏推定量 S^2 で置き換えて,

  $$\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \longrightarrow N(0,1)$$

  を得ることができる (証明略)。

  よって，$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ とすると，近似的に,

  $$P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

  となり,

  $$P(|\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

  を得る。

  したがって,

  $$P(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

  $\overline{X}$, S^2 を $\overline{x}$, s^2 で置き換えて，信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間は,

  $$(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}})$$

  となる。

問題 7.3 (P.108)： 勤労者世帯の年間収入の全国平均を調べるため，5097 世帯の年間収入を調査したところ，平均が 604 万円，標準偏差が 274 万円であった。年間収入の全国平均の信頼係数 0.9, 0.95 の信頼区間は？

解答： 問題の再解釈 $\Longrightarrow$
正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ から大きさ 5097 の標本をとって標本平均と標本標準偏差を計算した。$\overline{x} = 604$, $s = 274$ であった。信頼係数 0.90, 0.95 の μ の信頼区間は？
$n = 5097$ のとき，t 分布の正規近似によって，
$P\Big(\Big|\dfrac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}\Big| < z_{\alpha/2}\Big) = 1 - \alpha$
となるのは，$\alpha = 0.10$ で $z_{\alpha/2} = 1.645$，$\alpha = 0.05$ で $z_{\alpha/2} = 1.960$，である。
n が大きいとき，信頼係数 $1 - \alpha$ の μ の信頼区間は,
$(\overline{x} - z_{\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}})$
となるので,
信頼係数 0.90 の μ の信頼区間は
$(604 - 1.645\dfrac{274}{5097}, 604 + 1.645\dfrac{274}{5097})$
すなわち，(597.7, 610.3) を得る。
信頼係数 0.95 の μ の信頼区間は
$(604 - 1.960\dfrac{274}{5097}, 604 + 1.960\dfrac{274}{5097})$
すなわち，(596.5, 611.5) を得る。

7.3.3 分散の区間推定 (P.103，時間に余裕がなければ省略)

大きさ n の無作為標本 X_1, X_2, $\cdots$, X_n は互いに独立であり,
すべての $i = 1, 2, \cdots, n$ について，$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ と仮定する (正規母集団の仮定)。
このとき，定理 6.3 (P.83) より,

$$U = \sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma})^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

ただし，$S^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ (標本不偏分散) とする。

1. 自由度 $n - 1$ のカイ 2 乗分布の下側確率，上側確率が $\alpha/2$ となる点を，それぞれ $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$，$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ とする。

   $\Longrightarrow$ 図 7.4 (P.104)

2. $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$

   $\Longrightarrow$ 下側確率が $\alpha/2$ となる点

   $\Longrightarrow$ 上側確率が $1 - \alpha/2$ となる点

3. $P\big(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < U < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\big) = 1 - \alpha$

   $P\big(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\big) = 1-\alpha$

   $P\big(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\big) = 1 - \alpha$

4. したがって，信頼係数 $1 - \alpha$ の σ^2 の信頼区間は,
   $(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})$
   となる。

5. 実際には，推定量 S^2 をその推定値 s^2 で置き換えて,

   信頼係数 $1 - \alpha$ の σ^2 の信頼区間は,
   $(\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})$
   となる。

   ただし，$s^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ とする。

例題 7.3 (P.104)： 正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ から大きさ 20 の標本をとって標本平均と標本不偏分散を計算した。$s^2 = 17.2$ であった。信頼係数 0.95 の σ^2 の信頼区間は？

解答： $n = 20$, $\alpha = 0.05$ のとき,
$P\big(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\big) = 1 - \alpha$
となるのは，付表 2 (P.246) より，$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = 8.90655$,
$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = 32.8523$ である。
信頼係数 $1 - \alpha$ の σ^2 の信頼区間は,
$(\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})$
となる。
よって，信頼係数 0.95 の σ^2 の信頼区間は,
$(\dfrac{(20-1)17.2}{32.8523}, \dfrac{(20-1)17.2}{8.90655})$
となる。
すなわち，(9.948, 36.690) となる。

問題 7.5 (P.109)： 正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ から大きさ 12 の標本をとって標本平均と標本不偏分散を計算した。$s^2 = 2.8$ であった。信頼係数 0.90, 0.95 の σ^2 の信頼区間は？

解答：　$n=12$ で,
$P\big(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\big) = 1-\alpha$
となるのは，付表 2 (P.246) より，
$\alpha = 0.10$ のとき，
$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = 4.57481,\ \chi^2_{\alpha/2}(n-1) = 19.6751,$
$\alpha = 0.05$ のとき，
$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = 3.81575,\ \chi^2_{\alpha/2}(n-1) = 21.9200,$
である。
信頼係数 $1-\alpha$ の σ^2 の信頼区間は,
$\Big(\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\Big)$
となる。
よって，信頼係数 0.90 の σ^2 の信頼区間は,
$\Big(\dfrac{(12-1)2.8}{19.6751}, \dfrac{(12-1)2.8}{4.57481}\Big)$
となる。
すなわち，(1.565, 6.732) となる。
信頼係数 0.95 の σ^2 の信頼区間は,
$\Big(\dfrac{(12-1)2.8}{21.9200}, \dfrac{(12-1)2.8}{3.81575}\Big)$
となる。
すなわち，(1.405, 8.071) となる。

問題 7.6 (P.109)：　問題 7.4 (P.108) のデータを使って，GNP の対前年比の分散の信頼係数 0.9, 0.95 の信頼区間は？

解答：　$\overline{x} = 4.2,\ s^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 1.065$ を問題 7.4 より得た。
$n=13$ で,
$P\big(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\big) = 1-\alpha$
となるのは，付表 2 (P.246) より，
$\alpha = 0.10$ のとき，
$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = 5.22603,\ \chi^2_{\alpha/2}(n-1) = 21.0261,$
$\alpha = 0.05$ のとき，
$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = 4.40379,\ \chi^2_{\alpha/2}(n-1) = 23.3367,$
である。
信頼係数 $1-\alpha$ の σ^2 の信頼区間は,
$\Big(\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\Big)$
となる。
よって，信頼係数 0.90 の σ^2 の信頼区間は,
$\Big(\dfrac{(13-1)1.065}{21.0261}, \dfrac{(13-1)1.065}{5.22603}\Big)$
となる。
すなわち，(0.608, 2.445) となる。
信頼係数 0.95 の σ^2 の信頼区間は,
$\Big(\dfrac{(13-1)1.065}{23.3367}, \dfrac{(13-1)1.065}{4.40379}\Big)$
となる。
すなわち，(0.548, 2.902) となる。

7.3.4　比率の区間推定 (P.105)

n 回の試行 (実験)
i 回目の試行で,
成功のとき $X_i = 1$，失敗のとき $X_i = 0$ とする。

$$R = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

とする。
n 回の実験で成功する回数 $= R$
1 回の試行で成功する確率 $= p \implies P(X_i = 1) = p$
X_i の平均・分散を求める。

$$\mathrm{E}(X_i) = 1 \times P(X_i = 1) + 0 \times P(X_i = 0) = p$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X_i) &= (1-p)^2 \times P(X_i = 1) \\ &\qquad +(0-p)^2 \times P(X_i = 0) \\ &= p(1-p)\end{aligned}$$

離散型確率変数の平均･分散の求め方は，P.50，51 の (4.12), (4.14) を参考に。
一方,
比率 p の推定量 $\overline{X}$ を,

$$\overline{X} = \frac{R}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad (= \widehat{p})$$

とする。テキストでは，$\overline{X}$ を $\widehat{p}$ としている。
すなわち,
$\mathrm{E}(X_1) = \mathrm{E}(X_2) = \cdots = \mathrm{E}(X_n) = p$
$\mathrm{V}(X_1) = \mathrm{V}(X_2) = \cdots = \mathrm{V}(X_n) = p(1-p)$
$\overline{X}$ は n 個の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の標本平均である。
$\Longrightarrow$ 中心極限定理 (定理 6.1, P.81) の適用
$\mathrm{E}(\overline{X}) = p,\ \mathrm{V}(\overline{X}) = \dfrac{p(1-p)}{n}$ なので，n が大きいとき,

$$Z = \frac{\overline{X} - \mathrm{E}(\overline{X})}{\sqrt{\mathrm{V}(\overline{X})/n}} = \frac{\overline{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0,1)$$

として近似できる。
さらに，分散 $\mathrm{V}(\overline{X}) = \dfrac{p(1-p)}{n}$ は未知なので，p を $\overline{X}$ で置き換える。
よって，$\overline{X}$ の標本分布は，n が大きいとき，

$$Z = \frac{\overline{X} - p}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})/n}} \sim N(0,1)$$

として近似する。

信頼区間：
α を与えたとき，

$$P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

となる $z_{\alpha/2}$ を付表 1 (P.245) から見つける。

$$P\left(\left|\frac{\overline{X} - p}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})/n}}\right| < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$\begin{aligned} P(\ &\overline{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}} \\ &< p < \\ &\overline{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}\ ) = 1 - \alpha \end{aligned}$$

よって，信頼係数 $1-\alpha$ の p の信頼区間は，
$\overline{X}$ をその実現値 $\overline{x}$ で置き換えて，

$$(\overline{x} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}})$$

となる。ただし，テキストでは，

$$(\widehat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}, \widehat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}})$$

$\Longrightarrow$ P.106

例題 7.4 (P.106)： 表 1.5 (P.8) から，5097 世帯の調査で，1988 年度の勤労者世帯の年間収入が 700 万以上の比率の推定値は 0.292 だった。信頼係数 0.95 の母比率の信頼区間は？

解答： 信頼係数 $1-\alpha$ の p の信頼区間は，

$$(\widehat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}, \widehat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}})$$

となる。
α を与えたとき，

$$P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

となる $z_{\alpha/2}$ を付表 1 (P.245) から見つける。
$\alpha = 0.05$ のとき，
$z_{\alpha/2} = 1.96$
$n = 5097$, $\widehat{p} = 0.292$ なので，信頼係数 0.95 の p の信頼区間は，
$(0.292 - 1.96\sqrt{\dfrac{0.292(1-0.292)}{5097}},$
$0.292 + 1.96\sqrt{\dfrac{0.292(1-0.292)}{5097}})$
すなわち，(0.280, 0.304) となる。

問題 7.7 (P.109)： インスタントラーメンを美味しいとおもうかどうかの調査。100 人中 67 人が美味しいと答えた。美味しいとおもう人の比率の信頼係数 0.90, 0.95 の信頼区間は？

解答： 信頼係数 $1-\alpha$ の p の信頼区間は，

$$(\widehat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}, \widehat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}})$$

となる。
α を与えたとき，

$$P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

となる $z_{\alpha/2}$ を付表 1 (P.245) から見つける。
$\alpha = 0.10$ のとき，
$z_{\alpha/2} = 1.645$
$\alpha = 0.05$ のとき，
$z_{\alpha/2} = 1.960$
$n = 100$, $\widehat{p} = 0.67$ なので，信頼係数 0.90 の p の信頼区間は，
$(0.67 - 1.645\sqrt{\dfrac{0.67(1-0.67)}{100}},$
$0.67 + 1.645\sqrt{\dfrac{0.67(1-0.67)}{100}})$
すなわち，(0.593, 0.747) となる。
信頼係数 0.95 の p の信頼区間は，
$(0.67 - 1.960\sqrt{\dfrac{0.67(1-0.67)}{100}},$
$0.67 + 1.960\sqrt{\dfrac{0.67(1-0.67)}{100}})$
すなわち，(0.578, 0.762) となる。

8　仮説検定 (P.113)

統計的推測の方法

1. 推定

(a) **点推定：**

・母平均 μ の推定量 $\overline{X}$，その推定値 $\overline{x}$

・母分散 σ^2 の推定量 S^2，その推定値 s^2

・母比率 p の推定量 $\overline{X}$，その推定値 $\overline{x}$

(b) **区間推定：**

・母平均 μ の区間推定

(i) 正規母集団の場合

○ 母分散 σ^2 が既知のとき：

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$P\Big(\Big|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\Big| < z_{\alpha/2}\Big) = 1-\alpha$$

信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間：

$$(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

実際の計算では，

$\overline{X}$ を $\overline{x}$ で置き換える。

○ 母分散 σ^2 が未知のとき：

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$P\Big(\Big|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\Big| < t_{\alpha/2}(n-1)\Big) = 1-\alpha$$

信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間：

$$(\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}})$$

実際の計算では，

$\overline{X}$, S^2 を $\overline{x}$, s^2 で置き換える。

(ii) 正規母集団でない場合 (大標本，すなわち，n が大きいとき)

○ 母分散 σ^2 が既知のとき：

無作為標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$

すべての $i = 1, 2, \cdots, n$ について，$X_i \sim (\mu, \sigma^2)$ とする。このとき，

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$\Longrightarrow$ 中心極限定理 (定理 6.1, P.81)

$$P\Big(\Big|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\Big| < z_{\alpha/2}\Big) = 1-\alpha$$

信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間：

$$(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

実際の計算では，

$\overline{X}$ を $\overline{x}$ で置き換える。

○ 母分散 σ^2 が未知のとき：

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

について，σ^2 を S^2 で置き換えて，

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

と近似出来るので，

$$P\Big(\Big|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\Big| < z_{\alpha/2}\Big) = 1-\alpha$$

信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間：

$$(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}})$$

実際の計算では，

$\overline{X}$, S^2 を $\overline{x}$, s^2 で置き換える。

・母分散 σ^2 の区間推定 (正規母集団の仮定) *** 時間に余裕がなければ省略 ***

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$P\Big(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\Big) = 1-\alpha$$

信頼係数 $1-\alpha$ の σ^2 の信頼区間：

$$(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})$$

実際の計算では，S^2 を s^2 で置き換える。

・母比率 p の区間推定

$$\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0,1)$$

分母の p をその推定量 $\overline{X}$ で置き換えて，

$$\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})/n}} \sim N(0,1)$$

$$P\Big(\Big|\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})/n}}\Big| < z_{\alpha/2}\Big) = 1-\alpha$$

信頼係数 $1-\alpha$ の p の信頼区間 ($\overline{X}$ を $\overline{x}$ で置き換える)：

$$(\overline{x} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}},$$
$$\overline{x} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}})$$

2. 仮説検定 $\Longrightarrow$ 母数に関する仮説を検定

もっとまとめると，
区間推定の種類

1. 母平均 μ の区間推定
   (a) 正規母集団の場合
      i. 母分散 σ^2 は既知 $\Longrightarrow N(0,1)$
      ii. 母分散 σ^2 は未知 $\Longrightarrow t(n-1)$
   (b) 非正規母集団の場合 (大標本，すなわち，n が大きいとき)
      i. 母分散 σ^2 は既知 $\Longrightarrow N(0,1)$
      ii. 母分散 σ^2 は未知 $\Longrightarrow N(0,1)$
2. 母分散 (σ^2) の区間推定 (正規母集団) $\Longrightarrow \chi^2(n-1)$

   *** 時間に余裕がなければ省略 ***
3. 母比率 p の区間推定 $\Longrightarrow N(0,1)$

8.1 2種類の誤り (P.123)

検定しようとする仮説 $\Longrightarrow$ 帰無仮説 H_0
帰無仮説が正しくないときに成り立つ仮説 $\Longrightarrow$ 対立仮説 H_1

	H_0 は正しい	H_0 は正しくない
H_0 採択	正しい判定	第2種の誤り (確率 β)
H_0 棄却	第1種の誤り (確率 $\alpha =$ 有意水準)	正しい判定 ($1-\beta =$ 検出力)

8.2 検定の手続き (P.122)

1. 母数について帰無仮説 H_0 を立てる。
2. ある適当な統計量を考えて，H_0 が正しいときにこの統計量が従う分布を導く。

   ある適当な統計量 $\Longrightarrow$ 検定統計量
3. 実際の標本 (データ) からこの統計量の値 (統計値) を計算する。
4. 統計量の分布と統計値とを比較する。

   この統計値が分布の端にあれば，H_0 は起こりにくいと判定され，H_0 を棄却する。

起こりにくいとして H_0 を棄却する領域 $\Longrightarrow$ 棄却域 R (reject の意味)
起こり得るとして H_0 を採択する領域 $\Longrightarrow$ 採択域 A (accept の意味)

検定統計量 $T = f(X_1, X_2, \cdots, X_n)$
第1種の誤りの確率 $=$ 有意水準 α (H_0 が正しいにもかかわらず，H_0 を棄却する確率)

$$P\big(f(X_1, X_2, \cdots, X_n) \in R | H_0 \text{ が正しい}\big) = \alpha$$

第2種の誤りの確率 $= \beta$ (H_0 が正しくないにもかかわらず，H_0 を採択する確率)

$$P\big(f(X_1, X_2, \cdots, X_n) \in A | H_0 \text{ が正しくない}\big) = \beta$$

検出力 $= 1-\beta$ (H_0 が正しくないとき，H_0 を棄却する確率)

$$P\big(f(X_1, X_2, \cdots, X_n) \in R | H_0 \text{ が正しくない}\big) = 1-\beta$$

有意水準： $\alpha = 0.05, 0.01$ を選ぶ。

検定の種類

1. 母平均 μ の検定
   (a) 正規母集団の場合
      i. 母分散 σ^2 は既知 $\Longrightarrow N(0,1)$
      ii. 母分散 σ^2 は未知 $\Longrightarrow t(n-1)$
   (b) 非正規母集団の場合 (大標本，すなわち，n が大きいとき) $\Longrightarrow N(0,1)$

2. 2 つの標本の母平均の差 (H_0 : $\mu_1 = \mu_2$) の検定

   (a) 正規母集団の場合

      i. σ_1^2 と σ_2^2 は既知 $\Longrightarrow N(0,1)$

      ii. σ_1^2 と σ_2^2 は未知，大標本 (n が大きい) とき $\Longrightarrow N(0,1)$
      (小標本の場合は検定不可能，検定統計量の分布を導出できないため)

   (b) 非正規母集団の場合 (大標本，すなわち，n_1, n_2 が大きいとき) $\Longrightarrow N(0,1)$

3. 母比率 p の検定 $\Longrightarrow N(0,1)$

8.3 片側検定 (正規母集団，母平均の検定，母分散既知, P.117)

正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ n の無作為標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ があるものとする。
母平均 μ の推定量は $\overline{X}$ なので，$\overline{X}$ の分布を求める。
正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ n の無作為標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の標本平均 $\overline{X}$ の分布は，分散 σ^2 を既知としたとき，

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

となり，標準化によって，

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

となる。(P.81 最後の段落)

● ケース 1 (片側検定)

$$\text{帰無仮説}\quad H_0 : \mu = \mu_0$$
$$\text{対立仮説}\quad H_1 : \mu < \mu_0$$

ただし，μ_0 はある定数とする。
帰無仮説 H_0 が正しいもとで,

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

なので,

$$P(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha) = \alpha$$

となる。
このとき，$\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ を検定統計量と呼ぶ。
もし $\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha$ ならば，帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。
$\Longrightarrow$ 有意水準 α で，母平均 μ は μ_0 よりも小さいと判断する。

● ケース 2 (片側検定)

$$\text{帰無仮説}\quad H_0 : \mu = \mu_0$$
$$\text{対立仮説}\quad H_1 : \mu > \mu_0$$

の検定を考える。
帰無仮説 H_0 が正しいもとで,

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

なので,

$$P(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha) = \alpha$$

となる。
このとき，$\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ を検定統計量と呼ぶ。
もし $\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha$ ならば，帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。
$\Longrightarrow$ 有意水準 α で，母平均 μ は μ_0 よりも大きいと判断する。

8.4 両側検定 (正規母集団，母平均の検定，母分散既知, P.117)

● ケース 3 (両側検定)

$$\text{帰無仮説}\quad H_0 : \mu = \mu_0$$
$$\text{対立仮説}\quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

の検定を考える。
帰無仮説 H_0 が正しいもとで,

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

なので,

$$P(\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{\alpha/2}) = \alpha$$

となる。

このとき, $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ を検定統計量と呼ぶ。

もし

$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{\alpha/2}$ または $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{\alpha/2}$

ならば，帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。

$\Longrightarrow$ 有意水準 α で，母平均 μ と μ_0 は異なると判断する。

両側検定 $\Longrightarrow$ 区間推定に密接に関連している。

信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間は,

$(\overline{x} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$

として表される。

この区間に μ_0 が含まれなければ，帰無仮説 H_0 が棄却される。

例： 関東地方の世帯の収入の母集団の分布は，平均 616 万円，標準偏差 40 万円の正規分布であることがあらかじめ分かっているものとする。さらに，標準偏差は地域によって差がないものと仮定する。近畿地方の 256 世帯を無作為に抽出して，平均収入を計算したところ 608 万円だった。このとき，近畿地方の収入の母平均が関東地方の収入の母平均を下回っているかどうかを検定する。

解答： 近畿地方の収入の母平均を μ とすると,

帰無仮説 $H_0 : \mu = 616$

対立仮説 $H_1 : \mu < 616$

とおく。

第 i 番目の世帯は,

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

となる ($\sigma = 40^2$)。標本平均 $\overline{X}$ は,

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

すなわち,

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

となる。($\sigma^2 = 40^2$, $n = 256$)

帰無仮説 $H_0 : \mu = 616$，対立仮説 $H_1 : \mu < 616$ なので,

$$P(\frac{\overline{X}-616}{40/\sqrt{256}} < -z_\alpha) = \alpha$$

したがって，$\dfrac{\overline{x}-616}{40/\sqrt{256}} < -z_\alpha$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 H_0 を棄却する。

$\alpha = 0.01$ とすると,

$\dfrac{\overline{x}-616}{40/\sqrt{256}}$

$= \dfrac{608-616}{40/\sqrt{256}}$

$= -3.2 < -z_\alpha = -2.326$

なので，有意水準 0.01 で帰無仮説 H_0 を棄却する。

よって，近畿地方の収入の平均は関東地方の収入の平均より低いという仮説が支持される。

例： 全国の一世帯の収入の母集団の分布は，平均 604 万円，標準偏差 40 万円の正規分布であることがあらかじめ分かっているものとする。さらに，標準偏差は地域によって差がないものと仮定する。近畿地方の 256 世帯を無作為に抽出して，平均収入を計算したところ 608 万円だった。このとき，近畿地方の収入の母平均と全国の収入の母平均は差があるかどうかを検定する。

解答： 近畿地方の収入の母平均を μ とすると,

帰無仮説 $H_0 : \mu = 604$

対立仮説 $H_1 : \mu \neq 604$

とおく。

第 i 番目の世帯は,

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

となる ($\sigma = 40^2$)。標本平均 $\overline{X}$ は,

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

すなわち,

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

となる。($\sigma^2 = 40^2$, $n = 256$)

帰無仮説 $H_0: \mu = 604$，対立仮説 $H_1: \mu \neq 604$ なので，

$$P(\left|\frac{\overline{X} - 616}{40/\sqrt{256}}\right| > z_{\alpha/2}) = \alpha$$

したがって，
$\dfrac{\overline{x} - 604}{40/\sqrt{256}} < -z_{\alpha/2}$ または $\dfrac{\overline{x} - 604}{40/\sqrt{256}} > z_{\alpha/2}$
のとき，有意水準 α で帰無仮説 H_0 を棄却する。
$\alpha = 0.05$ とすると，
$\left|\dfrac{\overline{x} - 604}{40/\sqrt{256}}\right|$
$= \left|\dfrac{608 - 604}{40/\sqrt{256}}\right|$
$= |1.6| < z_{\alpha/2} = 1.96$
なので，有意水準 0.05 で帰無仮説 H_0 を採択する。
よって，近畿地方の収入の平均は全国の収入の平均と同じであるという仮説が支持される。

問題 8.1 (P.138)： ある洋服販売店は，何年もの間，週当たり平均 $\mu = 120$ 着，標準偏差 $\sigma = 20$ 着の紳士服を販売してきた。このたび，戦略的情報システム (SIS) を導入したところ，4 週間の平均で 135 着の売り上げがあった (標準偏差は変化していないものとする)。過去の売り上げと比べて売り上げが上がったかどうかを 1 %, 5 %, 10 % の有意水準を用いて検定せよ。

解答： 一週間の売り上げを X_i とする。

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

ここでは $\sigma^2 = 20^2$, $n = 4$ となる。

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

帰無仮説 $H_0: \mu = 120$
対立仮説 $H_1: \mu > 120$
H_0 のもとで，

$$\frac{\overline{X} - 120}{20/\sqrt{4}} \sim N(0, 1)$$

$$P(\frac{\overline{X} - 120}{20/\sqrt{4}} > z_\alpha) = \alpha$$

$\alpha = 0.01$ のとき，$z_\alpha = 2.326$
$\alpha = 0.05$ のとき，$z_\alpha = 1.645$
$\alpha = 0.10$ のとき，$z_\alpha = 1.282$

$$\frac{\overline{x} - 120}{20/\sqrt{4}} = \frac{135 - 120}{20/\sqrt{4}} = 1.5 < z_{0.01} = 2.326$$

$\Longrightarrow$ 有意水準 0.01 で H_0 を採択する。新システムによって売り上げがあがったとは言えない。

$$\frac{\overline{x} - 120}{20/\sqrt{4}} = \frac{135 - 120}{20/\sqrt{4}} = 1.5 < z_{0.05} = 1.645$$

$\Longrightarrow$ 有意水準 0.05 で H_0 を採択する。新システムによって売り上げがあがったとは言えない。

$$\frac{\overline{x} - 120}{20/\sqrt{4}} = \frac{135 - 120}{20/\sqrt{4}} = 1.5 > z_{0.10} = 1.282$$

$\Longrightarrow$ 有意水準 0.10 で H_0 を棄却する。新システムによって売り上げがあがったと言える。

問題 8.4 (P.139)： 『住宅調整調査』によると，1986 年の新設住宅の 1 戸当たり平均床面積は 80.9 m^2 であった。東京都下の 100 戸の新設住宅の床面積は平均 62.5 m^2 であった。東京都の住宅事情は悪いという仮説を検定する。ただし，標準偏差は全国と東京都で差がなく 18 m^2 であることが分かっているものとせよ。

解答： n 戸の東京都の住宅の床面積 $X_1, X_2, \cdots, X_n$
$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

となる。

帰無仮説　$H_0: \mu = \mu_0$
対立仮説　$H_1: \mu < \mu_0$

帰無仮説 H_0 が正しいもとで，

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

なので，

$$P(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha) = \alpha$$

となる。

もし $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha$ ならば，帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。

$\Longrightarrow$ 有意水準 α で，母平均 μ は μ_0 よりも小さいと判断する。

「標準偏差は全国と東京都で差がなく 18 m^2 であることが分かっている」$\Longrightarrow$ 分散は既知で $\sigma^2 = 18^2$

有意水準 $\alpha = 0.05$ のとき，$z_\alpha = 1.645$ となる。

$n = 100$, $\mu_0 = 80.9$, $\overline{x} = 80.9$ を代入する。

$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{62.5-80.9}{18/\sqrt{100}} = -10.22 < -z_\alpha = -1.645$

有意水準 0.05 で，H_0 を棄却する。東京都の住宅事情は全国平均より悪いといえる。

8.5 t 検定 (正規母集団，母平均の検定，母分散未知, P.126)

正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ n の無作為標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の標本平均 $\overline{X}$ の分布は,

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

となり，標準化によって,

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

となる。

さらに，分散 σ^2 を未知としたとき，σ^2 をその推定量 S^2 で置き換えて,

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

となる。(定理 6.5, P.86)

● ケース 1 (片側検定)

帰無仮説　$H_0: \mu = \mu_0$

対立仮説　$H_1: \mu < \mu_0$

帰無仮説 H_0 が正しいもとで,

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

なので,

$$P(\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < -t_\alpha(n-1)) = \alpha$$

となる。

このとき，$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ を検定統計量と呼ぶ。

もし $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} < -t_\alpha(n-1)$ ならば，帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。

$\Longrightarrow$ 有意水準 α で，母平均 μ は μ_0 よりも小さいと判断する。

● ケース 2 (片側検定)

帰無仮説　$H_0: \mu = \mu_0$

対立仮説　$H_1: \mu > \mu_0$

帰無仮説 H_0 が正しいもとで,

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

なので,

$$P(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > t_\alpha(n-1)) = \alpha$$

となる。

このとき，$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ を検定統計量と呼ぶ。

もし $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_\alpha(n-1)$ ならば，帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。

$\Longrightarrow$ 有意水準 α で，母平均 μ は μ_0 よりも大きいと判断する。

● ケース 3 (両側検定)

帰無仮説　$H_0: \mu = \mu_0$

対立仮説　$H_1: \mu \neq \mu_0$

帰無仮説 H_0 が正しいもとで,

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

なので,

$$P(\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > t_{\alpha/2}(n-1)) = \alpha$$

となる。

このとき，$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ を検定統計量と呼ぶ。

もし
$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} < -t_{\alpha/2}(n-1)$ または $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_{\alpha/2}(n-1)$
ならば，帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。
$\Longrightarrow$ 有意水準 α で，母平均 μ と μ_0 は異なると判断する。

両側検定 $\Longrightarrow$ 区間推定に密接に関連している。
信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間は，
$(\overline{x} - t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}})$
として表される。
この区間に μ_0 が含まれなければ，帰無仮説 H_0 が棄却される。

例題 8.5 (P.128)： 1986 年の労働者の週当たり平均労働時間は 41 時間だった。(1) 数年後に労働時間が短縮されているかどうか見るために 25 人の労働者を無作為に抽出して週当たり労働時間を調べたところ，平均 40.7 時間，標準偏差 0.9 時間であった。労働時間が短縮されたといえるかどうかを有意水準 0.01 で検定せよ。(2) 標本を増やして 144 人について調べたところ，平均 40.7 時間，標準偏差 0.9 時間であった。労働時間が短縮されたといえるかどうかを有意水準 0.01 で検定せよ。

解答： n 人の労働時間 $X_1, X_2, \cdots, X_n$
$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

σ^2 を S^2 に置き換えると，

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

となる。

$$\begin{aligned} &\text{帰無仮説}\quad H_0 : \mu = \mu_0 \\ &\text{対立仮説}\quad H_1 : \mu < \mu_0 \end{aligned}$$

帰無仮説 H_0 が正しいもとで，

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

なので，

$$P(\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < -t_{\alpha}(n-1)) = \alpha$$

となる。
ここでは $\mu_0 = 41$ となる。
もし $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} < -t_{\alpha}(n-1)$ ならば，帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。
$\Longrightarrow$ 有意水準 α で，母平均 μ は μ_0 よりも小さいと判断する。
(1) $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{40.7-41}{0.9/\sqrt{25}} = -1.68 > -t_{0.01}(24) = -2.49$
なので，H_0 を採択する。すなわち，労働時間が減少したとは言えない。
(2) $n = 144$ なので，正規近似を行う。
$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$
$= \dfrac{40.5-41}{0.8/\sqrt{144}}$
$= -7.50 > -t_{0.01}(143) = -z_{0.01} = -2.326$
なので，H_0 を棄却する。すなわち，労働時間が減少したと言える。

問題 8.3 (P.139)： ある職業の平均年収が 740 万円，630 万円，690 万円という 3 つの推定結果が，3 つの異なった研究機関から発表された。16 人を無作為に抽出して調べたところ，その年収の平均は 655 万円，標準偏差は 60 万円であった。
(1) 5 % の有意水準で，3 つの研究機関が出した仮説をそれぞれ検定せよ。
(2) 年収の平均を μ として，μ の 95 % 信頼区間を作れ。次に，信頼区間に入るかどうかで 3 つの仮説を検定せよ。

解答： n 人の年収 $X_1, X_2, \cdots, X_n$
$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

σ^2 を S^2 に置き換えると，

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

となる。

　　帰無仮説　$H_0 : \mu = \mu_0$

　　対立仮説　$H_1 : \mu \neq \mu_0$

帰無仮説 H_0 が正しいもとで,

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

なので,

$$P(\left|\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > t_{\alpha/2}(n-1)) = \alpha$$

となる。
もし
$\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} < -t_{\alpha/2}(n-1)$ または $\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_{\alpha/2}(n-1)$
ならば，帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。
$\Longrightarrow$ 有意水準 α で，母平均 μ と μ_0 は異なると判断する。
(1) 有意水準 $\alpha = 0.05$ なので，$t_{0.025}(15) = 2.131$ となる。

　　帰無仮説　$H_0 : \mu = 740$

　　対立仮説　$H_1 : \mu \neq 740$

$\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{655 - 740}{60/\sqrt{16}} = -5.67 < -t_{0.025}(15) = -2.131$
なので，H_0 を棄却する。

　　帰無仮説　$H_0 : \mu = 630$

　　対立仮説　$H_1 : \mu \neq 630$

$\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{655 - 630}{60/\sqrt{16}} = 1.67 < t_{0.025}(15) = 2.131$
なので，H_0 を採択する。

　　帰無仮説　$H_0 : \mu = 690$

　　対立仮説　$H_1 : \mu \neq 690$

$\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{690 - 740}{60/\sqrt{16}} = -2.33 < -t_{0.025}(15) = -2.131$
なので，H_0 を棄却する。
(2) 信頼係数 $1 - \alpha$ の μ の信頼区間を求める。

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

なので,

$$P(\left|\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < t_{\alpha/2}(n-1)) = \alpha$$

となる。
$n = 16$ のとき，$P\Big(\left|\dfrac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}\right| < t_{\alpha/2}(n-1)\Big) = 1 - \alpha$
となるのは，$\alpha = 0.05$ で $t_{\alpha/2}(n-1) = 2.131$，である。
信頼係数 $1 - \alpha$ の μ の信頼区間は,
$(\overline{x} - t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}})$
となるので,
信頼係数 0.95 の μ の信頼区間は $(655 - 2.131\dfrac{60}{16}, 655 + 2.131\dfrac{60}{16})$
すなわち，(623, 687) を得る。
帰無仮説が信頼係数 0.95 の μ の信頼区間 (623, 687) に入っていれば有意水準 0.05 で採択され，入っていなければ有意水準 0.05 で棄却される。すなわち，有意水準 0.05 で,
帰無仮説 $H_0 : \mu = 740$ は棄却され,
帰無仮説 $H_0 : \mu = 630$ は採択され,
帰無仮説 $H_0 : \mu = 690$ は棄却される。

補足： 母平均の検定 (非正規母集団，大標本の場合)

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立で，$\mathrm{E}(X_i) = \mu, \mathrm{V}(X_i) = \sigma^2$ の分布に従う。
このとき，中心極限定理 (定理 6.1, P.81) から,

$$\frac{\overline{X} - \mathrm{E}(\overline{X})}{\sqrt{\mathrm{V}(\overline{X})}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \longrightarrow N(0,1)$$

を得る。
さらに，σ^2 を S^2 で置き換えて,

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \longrightarrow N(0,1)$$

を得る。

母分散 σ^2 は既知のとき：　近似的に $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ が成り立つので，帰無仮説 H_0： $\mu = \mu_0$ が正しいもとで，$\boxed{\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)}$ となる (μ を μ_0 で置き換える)。このとき，検定統計量 $\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$。検定統計量の値 $\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$。

1. **対立仮説 H_1： $\mu < \mu_0$** (片側検定)

$P\Big(\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha\Big) \approx \alpha$ なので，$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 H_0： $\mu=\mu_0$ を棄却する。

2. **対立仮説 H_1： $\mu > \mu_0$** (片側検定)

   $P\Big(\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha\Big) \approx \alpha$ なので，$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 H_0： $\mu=\mu_0$ を棄却する。

3. **対立仮説 H_1： $\mu \neq \mu_0$** (両側検定)

   $P\Big(\Big|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\Big| > z_{\alpha/2}\Big) \approx \alpha$ なので，$\Big|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\Big| > z_{\alpha/2}$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 H_0： $\mu=\mu_0$ を棄却する。

母分散 σ^2 は未知のとき： 近似的に，$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ が成り立つので，帰無仮説 H_0： $\mu=\mu_0$ が正しいもとで，$\boxed{\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim N(0,1)}$ となる (μ を μ_0 で置き換える)。このとき，検定統計量 $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$。検定統計量の値 $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$。

1. **対立仮説 H_1： $\mu < \mu_0$** (片側検定)

   $P\Big(\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < -z_\alpha\Big) \approx \alpha$ なので，$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} < -z_\alpha$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 H_0： $\mu=\mu_0$ を棄却する。

2. **対立仮説 H_1： $\mu > \mu_0$** (片側検定)

   $P\Big(\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} > z_\alpha\Big) \approx \alpha$ なので，$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} > z_\alpha$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 H_0： $\mu=\mu_0$ を棄却する。

3. **対立仮説 H_1： $\mu \neq \mu_0$** (両側検定)

   $P\Big(\Big|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\Big| > z_{\alpha/2}\Big) \approx \alpha$ なので，$\Big|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\Big| > z_{\alpha/2}$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 H_0： $\mu=\mu_0$ を棄却する。

8.6 母平均の差の検定 (P.129)

8.6.1 母分散が既知の場合 (正規母集団)

2 つのグループ

・第 1 グループ：

大きさ n_1 の無作為標本

$X_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $i=1,2,\cdots,n_1$

標本平均 $\overline{X}_1 = \dfrac{1}{n_1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}$

標本不偏分散 $S_1^2 = \dfrac{1}{n_1-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i}-\overline{X}_1)^2$

・第 2 グループ：

大きさ n_2 の無作為標本

$X_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $i=1,2,\cdots,n_2$

標本平均 $\overline{X}_2 = \dfrac{1}{n_2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}$

標本不偏分散 $S_2^2 = \dfrac{1}{n_2-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i}-\overline{X}_2)^2$

母平均の差を検定したいので，統計量 $\overline{X}_1-\overline{X}_2$ の分布を考える。

定理 4.1 (P.51)，定理 4.5 (P.57) より，

$$\mathrm{E}(\overline{X}_1-\overline{X}_2) = \mu_1-\mu_2$$

定理 4.3 (P.52)，定理 4.8 (P.59) より，

$$\mathrm{V}(\overline{X}_1-\overline{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

したがって，

$$\overline{X}_1-\overline{X}_2 \sim N(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

標準化によって，

$$\Big((\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)\Big)\Big/\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \sim N(0,1)$$

を得る。

● ケース 1 (片側検定)

帰無仮説　$H_0: \mu_1=\mu_2$

対立仮説　$H_1: \mu_1<\mu_2$

帰無仮説 H_0 が正しいもとで，

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)\Big/\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \sim N(0,1)$$

なので，

$$P((\overline{X}_1-\overline{X}_2)\Big/\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} < -z_\alpha) = \alpha$$

となる。

このとき，$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \bigg/ \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$ を検定統計量と呼ぶ。

もし $(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) \bigg/ \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}} < -z_\alpha$ ならば，帰無仮説 $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。

$\Longrightarrow$ 有意水準 α で，母平均 μ_1 は μ_2 よりも小さいと判断する。

● ケース 2 (片側検定)

帰無仮説　$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

対立仮説　$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

帰無仮説 H_0 が正しいもとで，

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \bigg/ \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \sim N(0,1)$$

なので，

$$P((\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \bigg/ \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} > z_\alpha) = \alpha$$

となる。

このとき，$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \bigg/ \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$ を検定統計量と呼ぶ。

もし $(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) \bigg/ \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}} > z_\alpha$ ならば，帰無仮説 $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。

$\Longrightarrow$ 有意水準 α で，母平均 μ_1 は μ_2 よりも大きいと判断する。

● ケース 3 (両側検定)

帰無仮説　$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

対立仮説　$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

帰無仮説 H_0 が正しいもとで，

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \bigg/ \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \sim N(0,1)$$

なので，

$$P(|\overline{X}_1 - \overline{X}_2| \bigg/ \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} > z_{\alpha/2}) = \alpha$$

となる。

このとき，$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \bigg/ \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$ を検定統計量と呼ぶ。

もし

$(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) \bigg/ \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}} < -z_{\alpha/2}$

または

$(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) \bigg/ \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}} > z_{\alpha/2}$

ならば，帰無仮説 $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。

$\Longrightarrow$ 有意水準 α で，母平均 μ_1 と μ_2 は異なると判断する。

例題 8.6 (P.131)：　あるデパートで，店員とアルバイトが同じ商品を包装し，一時間の作業で以下の結果を得た。

	人数	平均包装数
店員	5	64
アルバイト	9	56

店員の方がアルバイトより熟練していると言えるか？有意水準 5% で検定せよ。ただし，店員とアルバイトの包装数は $N(\mu_1, 30.5)$，$N(\mu_2, 75.6)$ に従うことが分かっているものとせよ。

解答：　添字 1 を店員，添字 2 をアルバイトとする。

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

$$\Big((\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)\Big) \bigg/ \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \sim N(0,1)$$

帰無仮説　$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

対立仮説　$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

帰無仮説 H_0 が正しいもとで，

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \bigg/ \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \sim N(0,1)$$

なので，

$$P((\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \bigg/ \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} > z_\alpha) = \alpha$$

となる。

もし $(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) \Big/ \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}} > z_\alpha$ ならば，帰無仮説 H_0 : $\mu_1 = \mu_2$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。

$\Longrightarrow$ 有意水準 α で，母平均 μ_1 は μ_2 よりも大きいと判断する。

$\alpha = 0.05$ のとき，$z_\alpha = 1.645$ である。

また，$\overline{x}_1 = 64$, $\overline{x}_2 = 56$, $\sigma_1^2 = 30.5$, $\sigma_2^2 = 75.6$, $n_1 = 5$, $n_2 = 9$ なので，

$(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) \Big/ \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$

$= (64 - 56) \Big/ \sqrt{\dfrac{30.5}{5} + \dfrac{75.6}{9}}$

$= 2.10 > z_{0.05} = 1.645$

となり，H_0 を棄却する。すなわち，店員の方がアルバイトより熟練しているといえる。

8.6.2 母分散が未知の場合 (非正規母集団，n_1, n_2 共に大きいとき, P.132)

2 つのグループ

・第 1 グループ：

大きさ n_1 の無作為標本

$X_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $i = 1, 2, \cdots, n_1$

標本平均 $\overline{X}_1$

・第 2 グループ：

大きさ n_2 の無作為標本

$X_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $i = 1, 2, \cdots, n_2$

標本平均 $\overline{X}_2$

n_1, n_2 共に大きいとき, 母分散が未知でも既知でも，正規分布の仮定は必要ない。

母平均の差を検定したいので，統計量 $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ の分布を考える。

$$|\overline{X}_1 - \overline{X}_2| \Big/ \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \sim N(0,1)$$

σ_1^2, σ_2^2 を S_1^2, S_2^2 で置き換えて，n_1, n_2 が大きいとき中心極限定理 (定理 6.1, P.81) によって，近似的に

$$|\overline{X}_1 - \overline{X}_2| \Big/ \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \sim N(0,1)$$

となる。ただし，

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \overline{X}_1)^2$$

$$S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2i} - \overline{X}_2)^2$$

とする。

注意)

この場合，t 分布にはならない。

● ケース 1 (片側検定)

帰無仮説　$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

対立仮説　$H_1 : \mu_1 < \mu_2$

帰無仮説 H_0 が正しいもとで，近似的に，

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \Big/ \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \sim N(0,1)$$

なので，

$$P((\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \Big/ \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} < -z_\alpha) = \alpha$$

となる。

このとき，$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \Big/ \sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}$ を検定統計量と呼ぶ。

もし $(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) \Big/ \sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}} < -z_\alpha$ ならば，帰無仮説 H_0 : $\mu_1 = \mu_2$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。

$\Longrightarrow$ 有意水準 α で，母平均 μ_1 は μ_2 よりも小さいと判断する。

ただし，

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \overline{x}_1)^2$$

$$s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \overline{x}_2)^2$$

とする。

● ケース 2 (片側検定)

帰無仮説　$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

対立仮説　$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

帰無仮説 H_0 が正しいもとで，近似的に，

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \Big/ \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \sim N(0,1)$$

なので，

$$P((\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \Big/ \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} > z_\alpha) = \alpha$$

となる。

このとき，$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \Big/ \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$ を検定統計量と呼ぶ。

もし $(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) \Big/ \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} > z_\alpha$ ならば，帰無仮説 $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。

$\Longrightarrow$ 有意水準 α で，母平均 μ_1 は μ_2 よりも大きいと判断する。

● ケース 3 (両側検定)

帰無仮説　$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

対立仮説　$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

帰無仮説 H_0 が正しいもとで，近似的に，

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \Big/ \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \sim N(0,1)$$

なので，

$$P(|\overline{X}_1 - \overline{X}_2| \Big/ \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} > z_{\alpha/2}) = \alpha$$

となる。

このとき，$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \Big/ \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$ を検定統計量と呼ぶ。

もし

$(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) \Big/ \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < -z_{\alpha/2}$

または

$(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) \Big/ \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} > z_{\alpha/2}$

ならば，帰無仮説 $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。

$\Longrightarrow$ 有意水準 α で，母平均 μ_1 と μ_2 は異なると判断する。

例題 8.7 (P.132)：　関東地方と近畿地方とで，一年間の収入に差があるかどうかを調べたい。

	標本数	標本平均	標準偏差
関東	154	615	40
近畿	120	606	32

有意水準 1 %, 5 % で，関東の年間収入が関西より多いと言えるかどうかを検定せよ。

解答：　添字 1 を関東地方，添字 2 を近畿地方とする。n_1, n_2 が大きいとき，近似的に，

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2})$$

$$\Big((\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)\Big) \Big/ \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \sim N(0,1)$$

となる。

帰無仮説　$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

対立仮説　$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

帰無仮説 H_0 が正しいもとで，n_1, n_2 が大きいとき，近似的に，

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \Big/ \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \sim N(0,1)$$

なので，

$$P((\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \Big/ \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} > z_\alpha) = \alpha$$

となる。

このとき，$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \Big/ \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$ を検定統計量と呼ぶ。

もし $(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) \Big/ \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} > z_\alpha$ ならば，帰無仮説 $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。

$\Longrightarrow$ 有意水準 α で，母平均 μ_1 は μ_2 よりも大きいと判断する。

$\alpha = 0.05$ のとき，$z_\alpha = 1.645$ で，

$\alpha = 0.01$ のとき，$z_\alpha = 2.326$ である。

また，$\overline{x}_1 = 615$, $\overline{x}_2 = 606$, $s_1^2 = 40^2$, $s_2^2 = 32^2$, $n_1 = 154$, $n_2 = 120$ なので，

$(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) \Bigg/ \sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}$
$= (615 - 606) \Bigg/ \sqrt{\dfrac{40^2}{154} + \dfrac{32^2}{120}}$
$= 2.07 > z_{0.05} = 1.645$
となり，有意水準 0.05 で，H_0 を棄却する。すなわち，関東の方が関西より平均収入が多いといえる。
また
$2.07 > z_{0.01} = 2.326$
となり，有意水準 0.01 で，H_0 を採択する。すなわち，関東と関西では平均収入に差がないと言える。

8.7 母比率の検定 (P.136)

n 回の試行 (実験)
i 回目の試行で，
成功のとき $X_i = 1$，失敗のとき $X_i = 0$ とする。

$$R = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

とする。
n 回の実験で成功する回数 $= R$
1 回の試行で成功する確率 $= p \implies P(X_i = 1) = p$
X_i の平均・分散を求める。

$$\mathrm{E}(X_i) = 1 \times P(X_i = 1) + 0 \times P(X_i = 0) = p$$

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(X_i) &= (1-p)^2 \times P(X_i = 1) \\ &\qquad +(0-p)^2 \times P(X_i = 0) \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

離散型確率変数の平均･分散の求め方は，P.50，51 の (4.12)，(4.14) を参考に。
一方，
比率 p の推定量 $\overline{X}$ を，

$$\overline{X} = \frac{R}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad (= \widehat{p})$$

とする。テキストでは，$\overline{X}$ を $\widehat{p}$ としている。
すなわち，
$\mathrm{E}(X_1) = \mathrm{E}(X_2) = \cdots = \mathrm{E}(X_n) = p$
$\mathrm{V}(X_1) = \mathrm{V}(X_2) = \cdots = \mathrm{V}(X_n) = p(1-p)$

$\overline{X}$ は n 個の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の標本平均である。
$\Longrightarrow$ 中心極限定理 (定理 6.1, P.81) の適用
$\mathrm{E}(\overline{X}) = p$, $\mathrm{V}(\overline{X}) = \dfrac{p(1-p)}{n}$ なので，n が大きいとき，

$$Z = \frac{\overline{X} - \mathrm{E}(\overline{X})}{\sqrt{\mathrm{V}(\overline{X})/n}} = \frac{\overline{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0,1)$$

として近似できる。

● ケース 1 (片側検定)

帰無仮説　$H_0 : p = p_0$
対立仮説　$H_1 : p < p_0$

帰無仮説 H_0 が正しいもとで，近似的に，

$$\frac{\overline{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \sim N(0,1)$$

なので，

$$P\Big(\frac{\overline{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} < -z_\alpha\Big) = \alpha$$

となる。
このとき，$\dfrac{\overline{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$ を検定統計量と呼ぶ。
もし $\dfrac{\overline{x} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} < -z_\alpha$ ならば，帰無仮説 $H_0 : p = p_0$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。
$\Longrightarrow$ 有意水準 α で，母比率 p は p_0 よりも小さいと判断する。
テキストでは，
$\dfrac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} < -z_\alpha$ のとき，有意水準 α で，母比率 p は p_0 よりも小さいと判断する。

● ケース 2 (片側検定)

帰無仮説　$H_0 : p = p_0$
対立仮説　$H_1 : p > p_0$

帰無仮説 H_0 が正しいもとで，近似的に，

$$\frac{\overline{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \sim N(0,1)$$

なので，

$$P\Big(\frac{\overline{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} > z_\alpha\Big) = \alpha$$

となる。
このとき，$\dfrac{\overline{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$ を検定統計量と呼ぶ。
もし $\dfrac{\overline{x}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} > z_\alpha$ ならば，帰無仮説 $H_0 : p = p_0$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。
$\Longrightarrow$ 有意水準 α で，母比率 p は p_0 よりも大きいと判断する。
テキストでは，
$\dfrac{\widehat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} > z_\alpha$ のとき，有意水準 α で，母比率 p は p_0 よりも大きいと判断する。

● ケース 3 (両側検定)

帰無仮説　$H_0 : p = p_0$

対立仮説　$H_1 : p \neq p_0$

帰無仮説 H_0 が正しいもとで，近似的に，

$$\frac{\overline{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \sim N(0,1)$$

なので，

$$P(\left|\frac{\overline{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\right| > z_{\alpha/2}) = \alpha$$

となる。
このとき，$\dfrac{\overline{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$ を検定統計量と呼ぶ。
もし
$\dfrac{\overline{x}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} < -z_{\alpha/2}$ または $\dfrac{\widehat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} > z_{\alpha/2}$
ならば，帰無仮説 $H_0 : p = p_0$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。
$\Longrightarrow$ 有意水準 α で，母比率 p と p_0 は異なると判断する。
テキストでは，
$\dfrac{\widehat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} < -z_{\alpha/2}$ または $\dfrac{\widehat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} < -z_{\alpha/2}$
のとき，有意水準 α で，母比率 p は p_0 と異なると判断する。

例題：　我が国の総人口に対する 65 歳以上の高齢者の占める割合は 1987 年に 10.9 % であった。気候が平均寿命に影響するかどうかを調べるために，気候の温暖な四国地方から無作為に 1350 人を選び，65 歳以上の人口数を調べたところ，170 人であった。四国地方の高齢者比率は全国より高いといえるか？

解答：　n が大きいとき，

$$Z = \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0,1)$$

として近似できる。

帰無仮説　$H_0 : p = p_0$

対立仮説　$H_1 : p > p_0$

帰無仮説 H_0 が正しいもとで，近似的に，

$$\frac{\overline{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \sim N(0,1)$$

なので，

$$P(\frac{\overline{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} > z_\alpha) = \alpha$$

となる。
このとき，$\dfrac{\overline{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$ を検定統計量と呼ぶ。
もし $\dfrac{\overline{x}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} > z_\alpha$ ならば，帰無仮説 $H_0 : p = p_0$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。
$\Longrightarrow$ 有意水準 α で，母比率 p は p_0 よりも大きいと判断する。
$p_0 = 0.109$
$\alpha = 0.05$ のとき，$z_\alpha = 1.645$
$n = 1350$, $\overline{x} = \dfrac{170}{1350} = 1.126$
$\dfrac{\overline{x}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} = \dfrac{0.126-0.109}{\sqrt{0.109(1-0.109)/1350}} = 2.00 > z_\alpha = 1.645$
有意水準 0.05 で，H_0 を棄却する。四国地方の高齢者比率は全国平均より高いと言える。

推定 (まとめ)

点推定

母数		推定量		推定値
母平均	μ	標本平均	$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i$	$\overline{x}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$
母分散	σ^2	標本不偏分散	$S^2=\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$	$s^2=\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$
母比率	p	標本比率 (?)	$\overline{X}=\dfrac{R}{n}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i$	$\overline{x}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\ (=\widehat{p})$

$\{X_1,\,X_2,\,\cdots,\,X_n\}$ は大きさ n の標本，$\{x_1,\,x_2,\,\cdots,\,x_n\}$ はその実現値
確率変数 R の実現値 x

推定量の性質：

推定量	不偏性	一致性	有効性
$\overline{X}$	○	○	○
S^2	○	○	×
$\overline{X}$	○	○	○

区間推定

母平均 μ の区間推定

◎ 正規母集団

大きさ n の無作為標本 $\{X_1,\,X_2,\,\cdots,\,X_n\}$。すべての $i=1,2,\cdots,n$ について，$X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$ とする。

母分散 σ^2 が既知のとき：

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)\qquad\Longrightarrow\qquad P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{\alpha/2}\right)=1-\alpha$$

$z_{\alpha/2}$ は $100\times\dfrac{\alpha}{2}$ % 点で，確率 α が与えられると，正規分布表 (P.245) から得られる。
したがって，$P\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{X}+z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$

$\overline{X}$ を $\overline{x}$ で置き換えて，信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間：$\Longrightarrow$ $\boxed{\left(\overline{x}-z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$

母分散 σ^2 が未知のとき：

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)\qquad\Longrightarrow\qquad P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right|<t_{\alpha/2}(n-1)\right)=1-\alpha$$

$t_{\alpha/2}(n-1)$ は $100\times\dfrac{\alpha}{2}$ % 点で，確率 α と自由度 $n-1$ が与えられると，t 分布表 (P.247) から得られる。
したがって，$P\left(\overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$

$\overline{X}$, S^2 を $\overline{x}$, s^2 で置き換えて，信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間：$\Longrightarrow$ $\boxed{\left(\overline{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}},\overline{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right)}$

◎ **非正規母集団 (大標本, すなわち，n が大きいとき)**

大きさ n の無作為標本 $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$
すべての $i = 1, 2, \cdots, n$ について，$X_i \sim (\mu, \sigma^2)$ とする (正規分布を仮定する必要ない)。

母分散 σ^2 が既知のとき： n が大きいとき，中心極限定理 (定理 6.1, P.81) により，以下が成り立つ。

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \qquad \Longrightarrow \qquad P\Big(\Big|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\Big| < z_{\alpha/2}\Big) \approx 1-\alpha$$

したがって，$P\Big(\overline{X} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big) \approx 1-\alpha$

$\overline{X}$ を $\overline{x}$ で置き換えて，信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間：$\Longrightarrow$ $\boxed{\Big(\overline{x} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big)}$

母分散 σ^2 が未知のとき： さらに，分母の σ^2 を標本不偏分散 S^2 で置き換えて，近似する。

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \qquad \Longrightarrow \qquad P\Big(\Big|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\Big| < z_{\alpha/2}\Big) \approx 1-\alpha$$

したがって，$P\Big(\overline{X} - z_{\alpha/2}\dfrac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\alpha/2}\dfrac{S}{\sqrt{n}}\Big) \approx 1-\alpha$

$\overline{X}$, S^2 を $\overline{x}$, s^2 で置き換えて，信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間：$\Longrightarrow$ $\boxed{\Big(\overline{x} - z_{\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}}\Big)}$

母分散 σ^2 の区間推定

(略)

母比率 p の区間推定

中心極限定理により，近似的に，

$$\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0,1)$$

を得る。
さらに，分母の p をその推定量 $\overline{X}$ で置き換えて，近似する。

$$\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})/n}} \sim N(0,1) \qquad \Longrightarrow \qquad P\Big(\Big|\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})/n}}\Big| < z_{\alpha/2}\Big) \approx 1-\alpha$$

したがって，$P\Big(\overline{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}} < p < \overline{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}\Big) \approx 1-\alpha$

$\overline{X}$ を $\overline{x}$ で置き換えて，信頼係数 $1-\alpha$ の p の信頼区間：$\Longrightarrow$ $\boxed{\Big(\overline{x} - z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}\Big)}$

仮説検定 (まとめ)

検定の種類

母平均 μ の検定

◎ 正規母集団

大きさ n の無作為標本 $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$。$i = 1, 2, \cdots, n$ について，$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ とする。

母分散 σ^2 は既知のとき： $\overline{X}$ の分布は，$\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ なので，帰無仮説 H_0： $\mu = \mu_0$ が正しいもとで，

$\boxed{\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)}$ となる (μ を μ_0 で置き換える)。このとき，検定統計量 $\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$。検定統計量の値 $\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$。

1. **対立仮説 H_1： $\mu < \mu_0$** (片側検定)
   $P\Big(\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha\Big) = \alpha$ なので，$\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 H_0： $\mu = \mu_0$ を棄却する。
2. **対立仮説 H_1： $\mu > \mu_0$** (片側検定)
   $P\Big(\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha\Big) = \alpha$ なので，$\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 H_0： $\mu = \mu_0$ を棄却する。
3. **対立仮説 H_1： $\mu \neq \mu_0$** (両側検定)
   $P\Big(\Big|\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\Big| > z_{\alpha/2}\Big) = \alpha$ なので，$\Big|\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\Big| > z_{\alpha/2}$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 H_0： $\mu = \mu_0$ を棄却する。

母分散 σ^2 は未知のとき： $\overline{X}$ の分布は，$\dfrac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ なので，帰無仮説 H_0 ： $\mu = \mu_0$ が正しいもとで，

$\boxed{\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)}$ となる (μ を μ_0 で置き換える)。このとき，検定統計量 $\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$。検定統計量の値 $\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$。

1. **対立仮説 H_1： $\mu < \mu_0$** (片側検定)
   $P\Big(\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < -t_\alpha(n-1)\Big) = \alpha$ なので，$\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} < -t_\alpha(n-1)$ のとき，有意水準 α で H_0： $\mu = \mu_0$ を棄却する。
2. **対立仮説 H_1： $\mu > \mu_0$** (片側検定)
   $P\Big(\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_\alpha(n-1)\Big) = \alpha$ なので，$\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_\alpha(n-1)$ のとき，有意水準 α で H_0： $\mu = \mu_0$ を棄却する。
3. **対立仮説 H_1： $\mu \neq \mu_0$** (両側検定)
   $P\Big(\Big|\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}\Big| > t_{\alpha/2}(n-1)\Big) = \alpha$ なので，$\Big|\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}\Big| > t_{\alpha/2}(n-1)$ のとき，有意水準 α で H_0： $\mu = \mu_0$ を棄却する。

◎ 非正規母集団 (大標本，すなわち，n が大きいとき)

大きさ n の無作為標本 $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$。$i = 1, 2, \cdots, n$ について，$X_i \sim (\mu, \sigma^2)$ とする (正規分布の仮定は不必要)。

母分散 $\boldsymbol{\sigma^2}$ は既知のとき： 近似的に $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ が成り立つので，帰無仮説 H_0 ： $\mu = \mu_0$ が正しいもとで，
$\boxed{\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)}$ となる (μ を μ_0 で置き換える)。このとき，検定統計量 $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$。検定統計量の値 $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$。

1. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu < \mu_0}$** (片側検定)
   $P\Big(\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha\Big) \approx \alpha$ なので，$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 H_0： $\mu=\mu_0$ を棄却する。
2. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu > \mu_0}$** (片側検定)
   $P\Big(\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha\Big) \approx \alpha$ なので，$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 H_0： $\mu=\mu_0$ を棄却する。
3. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu \neq \mu_0}$** (両側検定)
   $P\Big(\Big|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\Big| > z_{\alpha/2}\Big) \approx \alpha$ なので，$\Big|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\Big| > z_{\alpha/2}$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 H_0： $\mu=\mu_0$ を棄却する。

母分散 $\boldsymbol{\sigma^2}$ は未知のとき： 近似的に，$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ が成り立つので，帰無仮説 H_0 ： $\mu = \mu_0$ が正しいもとで，
$\boxed{\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim N(0,1)}$ となる (μ を μ_0 で置き換える)。このとき，検定統計量 $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$。検定統計量の値 $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$。

1. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu < \mu_0}$** (片側検定)
   $P\Big(\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < -z_\alpha\Big) \approx \alpha$ なので，$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} < -z_\alpha$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 H_0： $\mu=\mu_0$ を棄却する。
2. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu > \mu_0}$** (片側検定)
   $P\Big(\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} > z_\alpha\Big) \approx \alpha$ なので，$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} > z_\alpha$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 H_0： $\mu=\mu_0$ を棄却する。
3. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu \neq \mu_0}$** (両側検定)
   $P\Big(\Big|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\Big| > z_{\alpha/2}\Big) \approx \alpha$ なので，$\Big|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\Big| > z_{\alpha/2}$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 H_0： $\mu=\mu_0$ を棄却する。

2 つの標本の母平均の差 ($\boldsymbol{H_0}$： $\boldsymbol{\mu_1 = \mu_2}$) の検定

◎ 正規母集団

・**第 1 グループ：**大きさ n_1 の無作為標本。$i=1,2,\cdots,n$ について，$X_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ とする。
・**第 2 グループ：**大きさ n_2 の無作為標本。$i=1,2,\cdots,n$ について，$X_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ とする。

$\boldsymbol{\sigma_1^2}$ と $\boldsymbol{\sigma_2^2}$ は既知のとき： 母平均の差を検定したいので，統計量 $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ の分布を考える。
定理 4.1 (P.51)，定理 4.5 (P.57) より，$\mathrm{E}(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$，また，定理 4.3 (P.53)，定理 4.8 (P.59) より，$\mathrm{V}(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}$ を得る。したがって，$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N(\mu_1-\mu_2, \dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2})$ が成り立つ (証明略)。さらに，標準化によって，

$\dfrac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1)$ を得るので，帰無仮説 H_0： $\mu_1=\mu_2$ が正しいもとで， $\boxed{\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1)}$ となる ($\mu_1-\mu_2=0$ を代入する)。このとき，検定統計量 $\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}$。検定統計量の値 $\dfrac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}$。

1. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu_1<\mu_2}$** (片側検定)
   $P\Big(\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}<-z_\alpha\Big)\approx\alpha$ なので， $\dfrac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}<-z_\alpha$ のとき，有意水準 α で H_0 を棄却する。
2. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu_1>\mu_2}$** (片側検定)
   $P\Big(\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}>z_\alpha\Big)\approx\alpha$ なので， $\dfrac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}>z_\alpha$ のとき，有意水準 α で H_0 を棄却する。
3. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu_1\neq\mu_2}$** (両側検定)
   $P\Big(\Big|\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\Big|>z_{\alpha/2}\Big)\approx\alpha$ なので， $\Big|\dfrac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\Big|>z_{\alpha/2}$ のとき，有意水準 α で H_0 を棄却する。

$\boldsymbol{\sigma_1^2}$ と $\boldsymbol{\sigma_2^2}$ は未知のとき： 小標本の場合，検定統計量の分布を導出できないため，検定不可能 (正規分布や t 分布にはならない)。
大標本の場合，正規分布で近似。

◎ 非正規母集団 (大標本，すなわち，$\boldsymbol{n_1}$, $\boldsymbol{n_2}$ が共に大きいとき)

・第 1 グループ：大きさ n_1 の無作為標本。$i=1,2,\cdots,n$ について，$X_{1i}\sim(\mu_1,\sigma_1^2)$ とする (正規分布の仮定は不必要)。
・第 2 グループ：大きさ n_2 の無作為標本。$i=1,2,\cdots,n$ について，$X_{2i}\sim(\mu_2,\sigma_2^2)$ とする (正規分布の仮定は不必要)。

$\boldsymbol{\sigma_1^2}$ と $\boldsymbol{\sigma_2^2}$ は既知のとき： 近似的に， $\dfrac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1)$ を得るので，帰無仮説 H_0： $\mu_1=\mu_2$ が正しいもとで， $\boxed{\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1)}$ となる ($\mu_1-\mu_2=0$ を代入する)。このとき，検定統計量 $\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}$。検定統計量の値 $\dfrac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}$。

1. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu_1<\mu_2}$** (片側検定)
   $P\Big(\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}<-z_\alpha\Big)\approx\alpha$ なので， $\dfrac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}<-z_\alpha$ のとき，有意水準 α で H_0 を棄却する。
2. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu_1>\mu_2}$** (片側検定)
   $P\Big(\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}>z_\alpha\Big)\approx\alpha$ なので， $\dfrac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}>z_\alpha$ のとき，有意水準 α で H_0 を棄却する。

3. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu_1 \neq \mu_2}$** (両側検定)

$P\Big(\left|\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\right| > z_{\alpha/2}\Big) \approx \alpha$ なので，$\left|\dfrac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\right| > z_{\alpha/2}$ のとき，有意水準 α で H_0 を棄却する。

$\boldsymbol{\sigma_1^2}$ と $\boldsymbol{\sigma_2^2}$ は未知のとき： 近似的に，$\dfrac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{S_1^2/n_1+S_2^2/n_2}} \sim N(0,1)$ を得るので，帰無仮説 H_0： $\mu_1=\mu_2$ が正しいもとで，$\boxed{\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{S_1^2/n_1+S_2^2/n_2}} \sim N(0,1)}$ となる ($\mu_1-\mu_2=0$ を代入する)。このとき，検定統計量 $\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{S_1^2/n_1+S_2^2/n_2}}$。検定統計量の値 $\dfrac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{s_1^2/n_1+s_2^2/n_2}}$。

1. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu_1 < \mu_2}$** (片側検定)

$P\Big(\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{S_1^2/n_1+S_2^2/n_2}} < -z_{\alpha}\Big) \approx \alpha$ なので，$\dfrac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{s_1^2/n_1+s_2^2/n_2}} < -z_{\alpha}$ のとき，有意水準 α で H_0 を棄却する。

2. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu_1 > \mu_2}$** (片側検定)

$P\Big(\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{S_1^2/n_1+S_2^2/n_2}} > z_{\alpha}\Big) \approx \alpha$ なので，$\dfrac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{s_1^2/n_1+s_2^2/n_2}} > z_{\alpha}$ のとき，有意水準 α で H_0 を棄却する。

3. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu_1 \neq \mu_2}$** (両側検定)

$P\Big(\left|\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{S_1^2/n_1+S_2^2/n_2}}\right| > z_{\alpha/2}\Big) \approx \alpha$ なので，$\left|\dfrac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{s_1^2/n_1+s_2^2/n_2}}\right| > z_{\alpha/2}$ のとき，有意水準 α で H_0 を棄却する。

母比率 p の検定

中心極限定理により，近似的に，$\dfrac{\overline{X}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0,1)$ を得るので，帰無仮説 H_0 ： $p=p_0$ が正しいもとで，$\boxed{\dfrac{\overline{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \sim N(0,1)}$ となる (p を p_0 で置き換える)。このとき，検定統計量 $\dfrac{\overline{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$。検定統計量の値 $\dfrac{\overline{x}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$。

1. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu < \mu_0}$** (片側検定)

$P\Big(\dfrac{\overline{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} < -z_{\alpha}\Big) \approx \alpha$ なので，$\dfrac{\overline{x}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} < -z_{\alpha}$ のとき，有意水準 α で H_0： $\mu=\mu_0$ を棄却する。

2. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu > \mu_0}$** (片側検定)

$P\Big(\dfrac{\overline{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} > z_{\alpha}\Big) \approx \alpha$ なので，$\dfrac{\overline{x}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} > z_{\alpha}$ のとき，有意水準 α で H_0： $\mu=\mu_0$ を棄却する。

3. **対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$： $\boldsymbol{\mu \neq \mu_0}$** (両側検定)

$P\Big(\left|\dfrac{\overline{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\right| > z_{\alpha/2}\Big) \approx \alpha$ なので，$\left|\dfrac{\overline{x}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\right| > z_{\alpha/2}$ のとき，有意水準 α で H_0 を棄却する。

9　最小二乗法について

経済理論に基づいた線型モデルの係数の値をデータから求める時に用いられる手法 $\Longrightarrow$ 最小二乗法

9.1　最小二乗法と回帰直線

(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), $\cdots$, (X_n, Y_n) のように n 組のデータがあり，X_i と Y_i との間に以下の線型関係を想定する。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i,$$

X_i は説明変数，Y_i は被説明変数，α, β はパラメータとそれぞれ呼ばれる。
上の式は回帰モデル (または，回帰式) と呼ばれる。目的は，切片 α と傾き β をデータ $\{(X_i, Y_i),\ i = 1, 2, \cdots, n\}$ から推定すること，

データについて：

1. タイム・シリーズ (時系列)・データ： i が時間を表す (第 i 期)。
2. クロス・セクション (横断面)・データ： i が個人や企業を表す (第 i 番目の家計，第 i 番目の企業)。

9.2　切片 α と傾き β の推定

次のような関数 $S(\alpha, \beta)$ を定義する。

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2$$

このとき，

$$\min_{\alpha, \beta} S(\alpha, \beta)$$

となるような α, β を求める (最小自乗法)。このときの解を $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ とする。
最小化のためには，

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0$$

を満たす α, β が $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ となる。

すなわち，$\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ は，

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} X_i) = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i (Y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} X_i) = 0, \tag{2}$$

を満たす。
さらに，

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = n\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = \widehat{\alpha} \sum_{i=1}^{n} X_i + \widehat{\beta} \sum_{i=1}^{n} X_i^2,$$

行列表示によって，

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\alpha} \\ \widehat{\beta} \end{pmatrix},$$

逆行列の公式：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ について，まとめて，

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \widehat{\alpha} \\ \widehat{\beta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{n \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 & -\sum_{i=1}^{n} X_i \\ -\sum_{i=1}^{n} X_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

さらに，$\widehat{\beta}$ について解くと，

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta} &= \frac{n \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - (\sum_{i=1}^{n} X_i)(\sum_{i=1}^{n} Y_i)}{n \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\overline{X}\overline{Y}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}
\end{aligned}$$

連立方程式の (3) 式から，

$$\widehat{\alpha} = \overline{Y} - \widehat{\beta}\overline{X}$$

となる。ただし，

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \overline{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

とする。

数値例：　以下の数値例を使って，回帰式 $Y_i = \alpha + \beta X_i$ の α，β の推定値 $\widehat{\alpha}$，$\widehat{\beta}$ を求める。

i	Y_i	X_i
1	6	10
2	9	12
3	10	14
4	10	16

$\widehat{\alpha}$，$\widehat{\beta}$ を求めるための公式は

$$\widehat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\overline{X}\overline{Y}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2}$$
$$\widehat{\alpha} = \overline{Y} - \widehat{\beta}\overline{X}$$

なので，必要なものは $\overline{X}$，$\overline{Y}$，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2$，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$ である。

i	Y_i	X_i	X_iY_i	X_i^2
1	6	10	60	100
2	9	12	108	144
3	10	14	140	196
4	10	16	160	256
合計	$\sum Y_i$	$\sum X_i$	$\sum X_iY_i$	$\sum X_i^2$
	35	52	468	696
平均	$\overline{Y}$	$\overline{X}$		
	8.75	13		

よって，

$$\widehat{\beta} = \frac{468 - 4 \times 13 \times 8.75}{696 - 4 \times 13^2} = \frac{13}{20} = 0.65$$
$$\widehat{\alpha} = 8.75 - 0.65 \times 13 = 0.3$$

となる。

注意事項：

1. α, β は真の値で未知
2. $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ は α, β の推定値でデータから計算される

回帰直線は

$$\widehat{Y}_i = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} X_i,$$

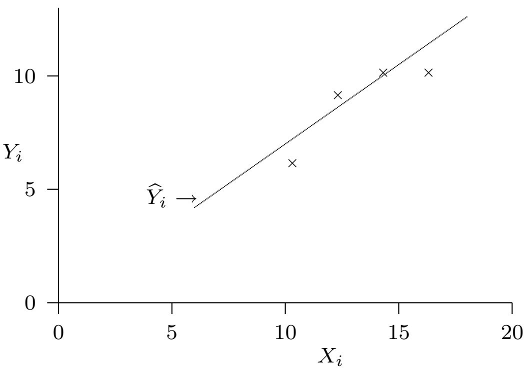
として与えられる。
上の数値例では，

$$\widehat{Y}_i = 0.3 + 0.65 X_i$$

となる。

i	Y_i	X_i	X_iY_i	X_i^2	$\widehat{Y}_i$
1	6	10	60	100	6.8
2	9	12	108	144	8.1
3	10	14	140	196	9.4
4	10	16	160	256	10.7
合計	$\sum Y_i$	$\sum X_i$	$\sum X_iY_i$	$\sum X_i^2$	$\sum \widehat{Y}_i$
	35	52	468	696	35.0
平均	$\overline{Y}$	$\overline{X}$			
	8.75	13			

図 2：Y_i，X_i，$\widehat{Y}_i$



$\widehat{Y}_i$ を実績値 Y_i の予測値または理論値と呼ぶ。

$$\widehat{u}_i = Y_i - \widehat{Y}_i,$$

$\widehat{u}_i$ を残差と呼ぶ。

$$Y_i = \widehat{Y}_i + \widehat{u}_i = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} X_i + \widehat{u}_i,$$

さらに，$\overline{Y}$ を両辺から引いて，

$$(Y_i - \overline{Y}) = (\widehat{Y}_i - \overline{Y}) + \widehat{u}_i,$$

9.3　残差 $\widehat{u}_i$ の性質について

$\widehat{u}_i = Y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} X_i$ に注意して，(1) 式から，

$$\sum_{i=1}^{n} \widehat{u}_i = 0,$$

を得る。
(2) 式から，

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \widehat{u}_i = 0,$$

を得る。
$\widehat{Y}_i = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} X_i$ から，

$$\sum_{i=1}^n \widehat{Y}_i \widehat{u}_i = 0,$$

を得る。なぜなら，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \widehat{Y}_i \widehat{u}_i &= \sum_{i=1}^n (\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} X_i)\widehat{u}_i \\ &= \widehat{\alpha}\sum_{i=1}^n \widehat{u}_i + \widehat{\beta}\sum_{i=1}^n X_i\widehat{u}_i \\ &= 0\end{aligned}$$

である。

i	Y_i	X_i	$\widehat{Y}_i$	$\widehat{u}_i$	$X_i\widehat{u}_i$	$\widehat{Y}_i\widehat{u}_i$
1	6	10	6.8	−0.8	−8.0	−5.44
2	9	12	8.1	0.9	10.8	7.29
3	10	14	9.4	0.6	8.4	5.64
4	10	16	10.7	−0.7	−11.2	−7.49
合計	$\sum Y_i$	$\sum X_i$	$\sum \widehat{Y}_i$	$\sum \widehat{u}_i$	$\sum X_i\widehat{u}_i$	$\sum \widehat{Y}_i\widehat{u}_i$
	35	52	35.0	0.0	0.0	0.00

9.4 決定係数 R^2 について

次の式

$$(Y_i - \overline{Y}) = (\widehat{Y}_i - \overline{Y}) + \widehat{u}_i,$$

の両辺を二乗して，総和すると，

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \Big((\widehat{Y}_i - \overline{Y}) + \widehat{u}_i\Big)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2 + 2\sum_{i=1}^n (\widehat{Y}_i - \overline{Y})\widehat{u}_i + \sum_{i=1}^n \widehat{u}_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2 + \sum_{i=1}^n \widehat{u}_i^2\end{aligned}$$

となる。まとめると，

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2 + \sum_{i=1}^n \widehat{u}_i^2$$

を得る。さらに，

$$1 = \frac{\sum_{i=1}^n (\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2} + \frac{\sum_{i=1}^n \widehat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2}$$

それぞれの項は，

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2 \Longrightarrow y$ の全変動
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^n (\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2 \Longrightarrow \widehat{Y}_i$ (回帰直線) で説明される部分
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^n \widehat{u}_i^2 \Longrightarrow \widehat{Y}_i$ (回帰直線) で説明されない部分

となる。
回帰式の当てはまりの良さを示す指標として，決定係数 R^2 を以下の通りに定義する。

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2}$$

または，

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \widehat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2},$$

として書き換えられる。
または，$Y_i = \widehat{Y}_i + \widehat{u}_i$ と

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^n (\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (\widehat{Y}_i - \overline{Y})(Y_i - \overline{Y} - \widehat{u}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (\widehat{Y}_i - \overline{Y})(Y_i - \overline{Y}) - \sum_{i=1}^n (\widehat{Y}_i - \overline{Y})\widehat{u}_i \\ &= \sum_{i=1}^n (\widehat{Y}_i - \overline{Y})(Y_i - \overline{Y})\end{aligned}$$

を用いて，

$$\begin{aligned}R^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2} \\ &= \frac{\Big(\sum_{i=1}^n (\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2\Big)^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2 \sum_{i=1}^n (\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2} \\ &= \left(\frac{\sum_{i=1}^n (\widehat{Y}_i - \overline{Y})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2 \sum_{i=1}^n (\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2}}\right)^2\end{aligned}$$

と書き換えられる。すなわち，R^2 は Y_i と $\widehat{Y}_i$ の相関係数の二乗と解釈される。
または，$\widehat{Y}_i = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} X_i$ と $\overline{Y} = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}\overline{X}$ を用いて，

$$\sum_{i=1}^n (\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2 = \widehat{\beta}^2 \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$$

$$= \widehat{\beta}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$$

を利用すると，

$$R^2 = \frac{\widehat{\beta}^2 \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}$$
$$= \frac{\widehat{\beta} \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}$$
$$= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}}\right)^2$$

としても書き換えられる。

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2 + \sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i^2$ から，明らかに，

$$0 \le R^2 \le 1,$$

となる。R^2 が 1 に近づけば回帰式の当てはまりは良いと言える。しかし，t 分布のような数表は存在しない。したがって,「どの値よりも大きくなるべき」というような基準はない。

慣習的には，メドとして 0.9 以上を判断基準にする。

数値例： 決定係数の計算には以下の公式を用いる。

$$R^2 = \frac{\widehat{\beta}^2 \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right)}{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - n\overline{Y}^2}$$

計算に必要なものは，$\widehat{\beta}$，$\overline{X}$，$\overline{Y}$，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2$，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$ である。

i	Y_i	X_i	Y_i^2	X_i^2
1	6	10	36	100
2	9	12	81	144
3	10	14	100	196
4	10	16	100	256
合計	$\sum Y_i$	$\sum X_i$	$\sum Y_i^2$	$\sum X_i^2$
	35	52	317	696
平均	$\overline{Y}$	$\overline{X}$		
	8.75	13		

$\widehat{\beta} = 0.65$，$\overline{X} = 13$，$\overline{Y} = 8.75$，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 696$，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = 317$ なので，

$$R^2 = \frac{0.65^2(696 - 4 \times 13^2)}{317 - 4 \times 8.75^2} = \frac{8.45}{10.75} = 0.786$$

9.5 まとめ

$\widehat{\alpha}$，$\widehat{\beta}$ を求めるための公式は

$$\widehat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\overline{X}\overline{Y}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2}$$
$$\widehat{\alpha} = \overline{Y} - \widehat{\beta}\overline{X}$$

なので，必要なものは $\overline{X}$，$\overline{Y}$，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2$，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$ である。

決定係数の計算には以下の公式を用いる。

$$R^2 = \frac{\widehat{\beta}^2 \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right)}{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - n\overline{Y}^2}$$

計算に必要なものは，$\widehat{\beta}$，$\overline{X}$，$\overline{Y}$，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2$，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$ である。