2007/10/23

「経済の実証分析の方法について」

神戸大学・経済学部　谷崎 久志

1　最小二乗法について

線型モデルの係数の値をデータから求める時に用いられる手法 $\Longrightarrow$ 最小二乗法

1.1　最小二乗法と回帰直線

$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \cdots, (X_n, Y_n)$ のように n 組のデータがあり，X_i と Y_i との間に以下の線型関係を想定する。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i,$$

X_i は説明変数，Y_i は被説明変数，α, β はパラメータとそれぞれ呼ばれる。

上の式は回帰モデル (または，回帰式) と呼ばれる。目的は，切片 α と傾き β をデータ $\{(X_i, Y_i),\ i = 1, 2, \cdots, n\}$ から推定すること。

1.2　切片 α と傾き β の推定

次のような関数 $S(\alpha, \beta)$ を定義する。

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2$$

このとき，

$$\min_{\alpha, \beta} S(\alpha, \beta)$$

となるような α, β を求める (最小自乗法)。このときの解を $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ とする。

最小化のためには，

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0$$

を満たす α, β が $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ となる。すなわち，$\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ は,

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} X_i) = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i (Y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} X_i) = 0, \tag{2}$$

を満たす。

$\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ について解くと,

$$\begin{aligned} \widehat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2} \\ \widehat{\alpha} &= \overline{Y} - \widehat{\beta}\,\overline{X} \end{aligned}$$

となる。ただし,

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \overline{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

とする。

$\Longrightarrow$ 最小二乗法を経済学に応用する。

2　需要関数 (一般的な話)

2 つの財を考える。

需要量： Q_1, Q_2　　価格： P_1, P_2　　所得： Y

● $Y \uparrow \Longrightarrow Q_1 \uparrow$

● $P_1 \uparrow \Longrightarrow Q_1 \downarrow$

● $P_2 \uparrow \Longrightarrow Q_2 \downarrow \Longrightarrow \begin{cases} Q_1 \uparrow & \text{(代替的)} \\ Q_1 \downarrow & \text{(補完的)} \end{cases}$

式で表す。

$Q_1 = a + bY + cP_1 + dP_2$　　—–>　　a, b, c, d は定数項と係数

符号条件：

$b > 0,\quad c < 0$

$d < 0$ (補完的)，または，$d > 0$ (代替的)

a, b, c をどのようにして求めるか？ —–> 最小二乗法（または，最小自乗法）

3　データ

１世帯当たり年間の品目別支出金額，購入数量及び平均価格（全世帯・勤労者世帯）

『家計調査年報 (平成 16 年)』(総務省統計局)

1982～2004 年の年次データ

====> パンの需要関数

====> 米，麺類も考慮する必要あり

====> 利用データ

- １世帯当たり年間のパンの購入量 (単位：1g)
- １世帯当たり年間の消費支出 (単位：円) $\longrightarrow$ 所得と考える
- パン 100g 当たりの価格 (単位：円)
- 米 1kg 当たりの価格 (単位：円)
- 麺類 100g 当たりの価格 (単位：円)

4　パンの需要関数

4.1　線形

$Q_1 =$ １世帯当たり年間のパンの購入量 (単位：1g)

$E =$ １世帯当たり年間の消費支出 (単位：円)

$P_1 =$ パン 100g 当たりの価格 (単位：円)

$P_2 =$ 麺類 100g 当たりの価格 (単位：円)

$P_3 =$ 米 1kg 当たりの価格 (単位：円)

$$Q_{1t} = \underset{(13.9)}{61946.7} + \underset{(4.62)}{0.00893}\ E_t - \underset{(11.4)}{710.4}\ P_{1t} - \underset{(1.51)}{152.5}\ P_{2t} + \underset{(0.91)}{4.014}\ P_{3t}$$

$$s = 685.1, \quad R^2 = 0.931, \quad \overline{R}^2 = 0.915, \quad DW = 1.334$$

パンと米は代替的，パンと麺類は補完的

4.2 対数線形

$Q_1 =$ １世帯当たり年間のパンの購入量 (単位：1g)

$E =$ １世帯当たり年間の消費支出 (単位：円)

$P_1 =$ パン 100g 当たりの価格 (単位：円)

$P_2 =$ 麺類 100g 当たりの価格 (単位：円)

$P_3 =$ 米 1kg 当たりの価格 (単位：円)

$$\log Q_{1t} = \underset{(1.88)}{4.35} + \underset{(4.33)}{0.753} \log E_t - \underset{(10.9)}{1.135} \log P_{1t} - \underset{(1.31)}{0.184} \log P_{2t} + \underset{(1.21)}{0.063} \log P_{3t}$$

$$s = 0.016, \quad R^2 = 0.931, \quad \overline{R}^2 = 0.916, \quad DW = 1.317$$

パンと米は代替的，パンと麺類は補完的

4.3　財の追加 & 対数線形

$Q_1 =$ １世帯当たり年間のパンの購入量 (単位：1g)

$E =$ １世帯当たり年間の消費支出 (単位：円)

$P_1 =$ パン 100g 当たりの価格 (単位：円)

$P_2 =$ 麺類 100g 当たりの価格 (単位：円)

$P_3 =$ 米 1kg 当たりの価格 (単位：円)

$P_4 =$ マーガリン 100g 当たりの価格 (単位：円)

$$
\begin{aligned}
\log Q_{1t} = -\underset{(0.50)}{2.01} + \underset{(4.15)}{1.207} \log E_t - \underset{(10.8)}{1.090} \log P_{1t} - \underset{(2.31)}{0.415} \log P_{2t} - \underset{(0.12)}{0.007} \log P_{3t} \\
+ \underset{(1.89)}{0.156} \log P_{4t}
\end{aligned}
$$

$$s = 0.015, \quad R^2 = 0.943, \quad \overline{R}^2 = 0.927, \quad DW = 1.906$$

パンと米は？，パンと麺類は補完的，パンとマーガリンは代替的