となる。
θ の制約つき最尤推定量を $\widetilde{\theta}$，制約無し最尤推定量を $\widehat{\theta}$ とする。
制約の数を G 個とする。

$\dfrac{l(\widetilde{\theta})}{l(\widehat{\theta})}$ を尤度比と呼ぶ

検定方法 1：　尤度比がある値より小さいときに，帰無仮説を棄却する。すなわち，

$$\frac{l(\widetilde{\theta})}{l(\widehat{\theta})} < c$$

となるときに，帰無仮説を棄却する。この場合，c を次のようにして求める必要がある。

$$\int\cdots\int\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\widetilde{\theta})\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \alpha$$

ただし，α は有意水準（帰無仮説が正しいときに，帰無仮説を棄却する確率）を表す。

検定方法 2（大標本検定）：　または，$n \longrightarrow \infty$ のとき，

$$-2\log\frac{l(\widetilde{\theta})}{l(\widehat{\theta})} \;\longrightarrow\; \chi^2(G)$$

となる。
この検定を尤度比検定と呼ぶ。

例 1：　正規母集団 $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ からの標本値 x_1，x_2，$\cdots$，x_n を用いて，σ^2 が既知のとき，帰無仮説 H_0： $\mu=\mu_0$，H_1： $\mu\neq\mu_0$ の尤度比検定を行う。

σ^2 が既知のとき，尤度関数 $l(\mu)$ は，

$$l(\mu) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\Bigl(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\Bigr)$$

となる。
$l(\mu)$ を最大にする μ と $\log l(\mu)$ を最大にする μ は同じになる。

μ の最尤推定量は，

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \equiv \overline{X}$$

となる。

尤度比検定統計量は，

$$\frac{l(\mu_0)}{l(\overline{X})} = \frac{\exp\Bigl(-\dfrac{1}{2\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\Bigr)}{\exp\Bigl(-\dfrac{1}{2\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\Bigr)} = \exp\Bigl(-\frac{1}{2\sigma^2/n}(\overline{X}-\mu_0)^2\Bigr) < c$$

となる c を求める。
H_0 が正しいときに，$\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)/\sigma \sim N(0,1)$ となるので，

$$P\Bigl(\Bigl|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\Bigr| > z_{\alpha/2}\Bigr) = \alpha$$

すなわち，

$$P\Bigl(\exp\Bigl(-\frac{1}{2\sigma^2/n}(\overline{X}-\mu_0)^2\Bigr) < \exp\Bigl(-\frac{1}{2}z_{\alpha/2}^2\Bigr)\Bigr) = \alpha$$

と変形できる。したがって，

$$c = \exp\Bigl(-\frac{1}{2}z_{\alpha/2}^2\Bigr)$$

とすればよい。

例 2：　X_1，X_n，$\cdots$，X_n は互いに独立で，それぞれパラメータ p を持ったベルヌイ分布に従うものとする。すなわち，X_i の確率関数は，

$$f(x;p) = p^x(1-p)^{1-x} \qquad\qquad x=0,1$$

となる。

このとき尤度関数は，

$$l(p) = \prod_{i=1}^{n}f(x_i;p) = \prod_{i=1}^{n}p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$$

となる。
p の最尤推定量 $\widehat{p}$ は，

$$\widehat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

である。

次の仮説検定を考える。

$$H_0:\ p=p_0 \qquad\qquad H_1:\ p\neq p_0$$

$\rightarrow$ 制約数は 1 つ。$(G=1)$

尤度比は，

$$\frac{l(p_0)}{l(\widehat{p})} = \frac{\prod_{i=1}^n p_0^{X_i}(1-p_0)^{1-X_i}}{\prod_{i=1}^n \widehat{p}^{X_i}(1-\widehat{p})^{1-X_i}}$$

したがって，$n \longrightarrow \infty$ のとき，

$$-2\log\frac{l(p_0)}{l(\widehat{p})} = -2\log\frac{p_0}{\widehat{p}}\sum_{i=1}^n X_i - 2\log\frac{1-p_0}{1-\widehat{p}}\sum_{i=1}^n(1-X_i)$$

$\longrightarrow\ \chi^2(1)$

$\chi^2(1)$ 分布の上側 100 α% 点を $\chi^2_\alpha(1)$ とするとき，

$$-2\log\frac{l(p_0)}{l(\widehat{p})} > \chi^2_\alpha(1)$$

のとき，帰無仮説 H_0： $p = p_0$ を棄却する。

例 3： 回帰モデル

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i$$
$$u_i \sim N(0, \sigma^2) \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

について，$\beta_1, \cdots, \beta_k$ に関する仮説の尤度比検定を行う。
例えば，

$$H_0:\ \beta_1 = 0$$
$$H_0:\ \beta_1 + \beta_2 = 1$$
$$H_0:\ \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

などのような仮説検定

$\theta = (\beta_1, \cdots, \beta_k, \sigma^2)$ とする。
尤度関数は，

$$l(\theta) = \prod_{i=1}^n f(Y_i;\theta)$$
$$= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\Big(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(Y_i - \beta_1X_{1i} - \cdots - \beta_kX_{ki})^2\Big)$$

となる。
H_0 の制約つき最尤推定量を $\widetilde{\theta} = (\widetilde{\beta}_1, \cdots, \widetilde{\beta}_k, \widetilde{\sigma}^2)$ とする。
この仮設に含まれる制約数を G とする。
制約なし最尤推定量を $\widehat{\theta} = (\widehat{\beta}_1, \cdots, \widehat{\beta}_k, \widehat{\sigma}^2)$ とする。
尤度比

$$\frac{l(\widetilde{\theta})}{l(\widehat{\theta})} = \frac{(2\pi\widetilde{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\Big(-\frac{1}{2\widetilde{\sigma}^2}\sum_{i=1}^n(Y_i - \widetilde{\beta}_1X_{1i} - \cdots - \widetilde{\beta}_kX_{ki})^2\Big)}{(2\pi\widehat{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\Big(-\frac{1}{2\widehat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^n(Y_i - \widehat{\beta}_1X_{1i} - \cdots - \widehat{\beta}_kX_{ki})^2\Big)}$$

$$= \frac{(\widetilde{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\Big(-\frac{n-G}{2}\Big)}{(\widehat{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\Big(-\frac{n-k}{2}\Big)}$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{n-G}\sum_{i=1}^n \widetilde{u}_i^2}{\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^n \widehat{u}_i^2}\right)^{-n/2}\exp\Big(-\frac{k-G}{2}\Big)$$

$$= \exp\Big(-\frac{k-G}{2}\Big)\Big(\frac{n-k}{n-G}\Big)^{-n/2}\Big(\frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{u}_i^2}{\sum_{i=1}^n \widehat{u}_i^2}\Big)^{-n/2}$$

$$= \exp\Big(-\frac{k-G}{2}\Big)\Big(\frac{n-k}{n-G}\Big)^{-n/2} \times \Big(1 + \frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{u}_i^2 - \sum_{i=1}^n \widehat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^n \widehat{u}_i^2}\Big)^{-n/2}$$

$$= \exp\Big(-\frac{k-G}{2}\Big)\Big(\frac{n-k}{n-G}\Big)^{-n/2} \times \Big(1 + \frac{G}{n-k}\frac{(\sum_{i=1}^n \widetilde{u}_i^2 - \sum_{i=1}^n \widehat{u}_i^2)/G}{\sum_{i=1}^n \widehat{u}_i^2/(n-k)}\Big)^{-n/2}$$

$$< c$$

のとき仮説を棄却する。

$$\frac{(\sum_{i=1}^n \widetilde{u}_i^2 - \sum_{i=1}^n \widehat{u}_i^2)/G}{\sum_{i=1}^n \widehat{u}_i^2/(n-k)} \sim F(G, n-k)$$

を利用すると c が求まる。

ただし，途中で以下を利用

$$\widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-G}\sum_{i=1}^n(Y_i - \widetilde{\beta}_1X_{1i} - \cdots - \widetilde{\beta}_kX_{ki})^2$$
$$= \frac{1}{n-G}\sum_{i=1}^n \widetilde{u}_i^2$$

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^n(Y_i - \widehat{\beta}_1X_{1i} - \cdots - \widehat{\beta}_kX_{ki})^2$$
$$= \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^n \widehat{u}_i^2$$

近似的には，

$$-2\log\frac{l(\widetilde{\theta})}{l(\widehat{\theta})} = -2\log\frac{(\widetilde{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\Big(-\frac{n-G}{2}\Big)}{(\widehat{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\Big(-\frac{n-k}{2}\Big)}$$
$$= n\log\Big(\frac{\widetilde{\sigma}^2}{\widehat{\sigma}^2}\Big) + (k-G)$$
$$\longrightarrow \chi^2(G)$$

例 4：　回帰モデル

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$
$$u_i = \rho u_{i-1} + \epsilon_i$$
$$\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \qquad i = 2, 3, \cdots, n$$

について，H_0： $\rho = 0$，H_1： $\rho \neq 0$ の尤度比検定を行う。

$\theta = (\alpha, \beta, \sigma^2, \rho)$ とする。対数尤度関数は，

$$\log l(\theta) = \sum_{i=2}^{n} \log f(Y_i; \theta) = -\frac{n-1}{2}\log(2\pi) - \frac{n-1}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=2}^{n}\Big((Y_i - \rho Y_{i-1}) - \alpha(1-\rho) - \beta(X_i - \rho X_{i-1})\Big)^2$$

となる。
対数尤度関数をそれぞれ α，β，σ^2，ρ について微分し，ゼロとおく。4 本の連立方程式を解いて，制約なし最尤推定量 $\widehat{\theta} = (\widehat{\alpha},\ \widehat{\beta},\ \widehat{\sigma}^2,\ \widehat{\rho})$ が得られる。

$\rho = 0$ と制約をおく。$\theta = (\alpha, \beta, \sigma^2, 0)$ とする。対数尤度関数は，

$$\log l(\theta) = \sum_{i=2}^{n} \log f(Y_i; \theta) = -\frac{n-1}{2}\log(2\pi) - \frac{n-1}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=2}^{n}(Y_i - \alpha - \beta X_i)^2$$

となる。
上記の対数尤度関数をそれぞれ α，β，σ^2 について微分し，ゼロとおく。3 本の連立方程式を解いて，$\rho = 0$ の制約付き最尤推定量 $\widetilde{\theta} = (\widetilde{\alpha},\ \widetilde{\beta},\ \widetilde{\sigma}^2,\ 0)$ が得られる。

すなわち，

$$\frac{\max_{\alpha,\beta,\sigma^2} l(\alpha, \beta, \sigma^2, 0)}{\max_{\alpha,\beta,\sigma^2,\rho} l(\alpha, \beta, \sigma^2, \rho)} = \frac{l(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\sigma}^2, 0)}{l(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\sigma}^2, \widehat{\rho})} = \frac{l(\widetilde{\theta})}{l(\widehat{\theta})}$$

$\log l(\widehat{\theta})$ は，$\widehat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\Big((Y_i - \widehat{\rho} Y_{i-1}) - \widehat{\alpha}(1-\widehat{\rho}) - \widehat{\beta}(X_i - \widehat{\rho} X_{i-1})\Big)^2$ に注意して，

$$\begin{aligned}\log l(\widehat{\theta}) &= -\frac{n-1}{2}\log(2\pi) - \frac{n-1}{2}\log(\widehat{\sigma}^2) - \frac{1}{2\widehat{\sigma}^2}\sum_{i=2}^{n}\Big((Y_i - \widehat{\rho} Y_{i-1}) - \widehat{\alpha}(1-\widehat{\rho}) - \widehat{\beta}(X_i - \widehat{\rho} X_{i-1})\Big)^2 \\ &= -\frac{n-1}{2}\log(2\pi) - \frac{n-1}{2}\log(\widehat{\sigma}^2) - \frac{n-1}{2}\end{aligned}$$

となる。
同様に，$\log l(\widetilde{\theta})$ は，$\widetilde{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=2}^{n}(Y_i - \widetilde{\alpha} - \widetilde{\beta} X_i)^2$ に注意して，

$$\begin{aligned}\log l(\widetilde{\theta}) &= -\frac{n-1}{2}\log(2\pi) - \frac{n-1}{2}\log(\widetilde{\sigma}^2) - \frac{1}{2\widetilde{\sigma}^2}\sum_{i=2}^{n}(Y_i - \widetilde{\alpha} - \widetilde{\beta} X_i)^2 \\ &= -\frac{n-1}{2}\log(2\pi) - \frac{n-1}{2}\log(\widetilde{\sigma}^2) - \frac{n-1}{2}\end{aligned}$$

となる。
したがって，尤度比検定統計量

$$-2\log\frac{l(\widetilde{\theta})}{l(\widehat{\theta})} = (n-1)\log\frac{\widetilde{\sigma}^2}{\widehat{\sigma}^2}$$

は，n が大きくなると，$\chi^2(1)$ 分布に近づく。

13　時系列分析と季節調整

時系列データを分析する主要な目的は，そのデータがどのようなメカニズムで生成されたかを明らかにし，その構造に基づいてさまざまな状況での予測を行うことである。
時系列データ（X_t）が以下の 4 つの要素から構成されていると仮定されることが多い。

(1) 時間の経過とともに傾向的に変動する部分。トレンド（T_t，trend）という。

(2) ほぼ一定の周期をもって循環する部分。循環変動（C_t，cycle）という。

(3) 毎年同じ時期（季節）に規則的に観察される変動部分。季節変動（S_t，seasonality）という。

(4) (1) ～ (3) によって説明されない部分。不規則変動（I_t，irregularity）という。

すなわち，X_t は，

加法型モデル： $X_t = T_t + C_t + S_t + I_t$

または，

乗法型モデル： $X_t = T_t \times C_t \times S_t \times I_t$

と表される。

この接近方法を時系列の分解アプローチと呼ぶ。このアプローチではそれぞれの変動を特定化し，それらを総合することにより原系列の変動の特徴を探り，予測に利用する。このアプローチでは，生成メカニズムの理論的背景（例えば，経済学の理論的背景）についての知識は必要としない。

また，時系列データの生成過程を確率的に描写し，データの生成された確率的構造を明らかにし，その構造に基づいて予測などを行う場合も考えられる。このような接近方法を時系列分析（time series analysis）という。この分析方法も生成メカニズムの理論的背景についての知識は必要としない。

13.1　季節変動

季節調整済みデータ（seasonally adjusted data）：原系列（当初に与えられたデータの系列）から季節変動をとり除いたデータ

季節調整済みデータを作成する簡単な方法 ⟶ 移動平均法 (moving average)：1 年分のデータを平均することにより季節変動を除去する。

移動平均値の中心化による t 期の季節調整値を Y_t で表す。

月次データの季節調整：

$$Y_t = \underbrace{\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\frac{1}{12}(X_{t-6}+\cdots+X_{t+5})}_{(t-0.5)\text{ 期の季節調整値}} + \underbrace{\frac{1}{12}(X_{t-5}+\cdots+X_{t+6})}_{(t+0.5)\text{ 期の季節調整値}}\Big)}_{t\text{ 期の季節調整値}}$$
$$= \frac{1}{24}\Big(X_{x-6} + 2(X_{t-5}+\cdots+X_{t+5}) + X_{t+6}\Big)$$

四半期データの季節調整：

$$Y_t = \underbrace{\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\frac{1}{4}(X_{t-2}+\cdots+X_{t+1})}_{(t-0.5)\text{ 期の季節調整値}} + \underbrace{\frac{1}{4}(X_{t-1}+\cdots+X_{t+2})}_{(t+0.5)\text{ 期の季節調整値}}\Big)}_{t\text{ 期の季節調整値}}$$
$$= \frac{1}{8}\Big(X_{x-2} + 2(X_{t-1}+X_t+X_{t+1}) + X_{t+2}\Big)$$

この移動平均の中心化法による季節調整の欠点：

(1) 対象時系列データの前後 6 カ月の季節調整ができない。
(2) 季節調整値を得るためには移動平均とり，さらにその平均をとるといった作業を行っている。時系列データの季節変動だけでなく，不規則変動もならしてしまい，過度にスムーズな系列ができる危険性がある。

現在よく利用されている米国のセンサス局で開発されたセンサス局法（X11，X12-ARIMA）は，このような点を考慮して開発された季節調整法

13.2　トレンド

時系列データの傾向的な動きを特定化する方法として，トレンド部分を時間の具体的な関数で近似し，その係数を回帰分析によって求める。
一次式：

$$T_t = \alpha + \beta t$$

二次式：

$$T_t = \alpha + \beta t + \gamma t^2$$

成長率が一定の場合には，次のような指数関数によってトレンド部分を描写する（b は成長率を表す)。

$$T_t = Ae^{bt}$$

対数変換して，

$$\log T_t = A' + bt$$

とする。

T_t には季節調整済みデータを用いる。

13.3　循環変動

季節調整系列からトレンド部分を差し引いた系列を求める。

$$C_t = T_t - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} t$$

時系列データに内蔵されている周期性を計測し，それがどのような要因によって引き起こされているのかを探ることにより景気変動のメカニズムを理解しようという試みが数多くなされてきた。

14　時系列分析と定常性

時系列データが生成された確率的構造を把握するために，その生成過程を確率的に表す。
観察された時系列データの集合を

$$\{x_t\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

によって表す。

各期の観察値を確率変数の実現値として捉える。次のような確率変数の集合（確率過程と呼ぶ）を考える。

$$\{X_t\} = \{\cdots, X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots\}$$

第 t 期の観察値 x_t は，第 1 期の確率変数 X_t の実現値と考える。
各期の確率変数はそれぞれ分布関数によって特徴づけられており，平均，分散をもつ。
異時点間の確率変数について，相互に依存し，共分散を定義する。
時系列データが生成された確率的構造を明らかにすることは，これらの確率変数の特性値を推定すること。
一般に各期の平均，分散，さらに異時点間の共分散は異なった値をとりうるであろう。
しかし，各時点の確率変数の平均，分散を推計するためのデータはその期の実現値 1 つしか利用できない。
そこで推定のためには，確率的構造に制約を課す必要が出てくる。
その制約として重要なのが弱定常性（weak stationary）という性質である。
弱定常性は次の 3 つの式によって表される。

$$\mathrm{E}[X_t] = \mu$$
$$\mathrm{V}(X_t) = \mathrm{E}[(X_t - \mu)^2] = \phi(0)$$
$$\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-s}) = \mathrm{E}[(X_t - \mu)(X_{t-s} - \mu)] = \phi(s)$$

各期の平均，分散が時間に依存せずに一定であることを示している。
X_t と X_{t-s} の間の共分散（自己共分散，auto-covariance）が 2 時点間の時間的距離 s にのみに依存している。分散（自己分散）は $s = 0$ の場合であることに注意。
定常性の制約を課すことにより，推定すべきパラメータの数を大幅に減らすことができる。

平均，分散，共分散の推定には，以下の標本平均，標本分散，標本共分散が用いられる。

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t$$
$$\hat{\phi}(0) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(x_t - \overline{x})^2$$
$$\hat{\phi}(s) = \frac{1}{n-s}\sum_{t=s+1}^{n}(x_t - \overline{x})(x_{t-s} - \overline{x})$$

経済データには定常性を満たさないものもが多い。
この場合は，階差をとる（2 回階差をとる場合もある）
時系列データの背後の確率過程を特定化する際に役立つのが自己相関（係数）(auto-correlation)，あるいは，コレログラム（correlogram）
自己相関は自己共分散 $\phi(s)$ を自己分散 $\phi(0)$ で割った値である。

$$\rho(s) = \frac{\phi(s)}{\phi(0)}$$

自己相関は異時点間の確率変数の相関関係を表しており，その値は -1 と 1 の間にある。
自己相関係数の全体をコレログラムという。
各期の確率変数が独立に分布している場合には，異時点間の自己相関はすべてゼロとなる。
平均がゼロで分散が一定の定常性をもつ確率過程で自己相関がゼロのものを，ホワイト・ノイズ（white noise），または，白色雑音と呼ぶ。

標本について見れば，標本自己相関は次式で計算される。

$$\hat{\rho}(s) = \frac{\hat{\phi}(s)}{\hat{\phi}(0)}$$

14.1　時系列モデルの特定化

14.1.1　自己回帰 (AR) モデル

自己回帰モデルの基本型は AR(1) といわれる次のようなモデルである。

$$X_t = \mu + \theta X_{t-1} + u_t$$

ただし，μ，θ は定数，u_t は平均 0，分散 σ^2 をもつホワイト・ノイズである。
また AR(1) の (　) 内の 1 はモデルの次数と呼ばれる。

上記のモデルは1次の自己回帰モデルである。
確率過程 $\{X_t\}$ が定常性を満たすには $|\theta| < 1$ でなければならない（理由は等比数列の収束の条件によっている）。

X_t の平均は $\mu/(1-\theta)$,
自己分散 $\phi(0)$ は $\sigma^2/(1-\theta^2)$,
自己共分散 $\phi(s)$ は $\theta^s\phi(0)$,
自己相関は $\rho(s) = \theta^s$ となる。

$|\theta| < 1$ であるから，自己相関は確率変数間の時間的距離（すなわち，s）が長ければ長いほど小さくなっていく。

14.1.2 移動平均 (MA) モデル

移動平均モデルの基本型は，MA(1) といわれる次のようなモデルである。

$$X_t = \mu + u_t + \psi u_{t-1}$$

ホワイト・ノイズの移動平均によって表現されている。
X_t の平均は μ で,
分散 $\phi(0)$ は $\sigma^2(1+\psi^2)$,
自己共分散 $\phi(s)$ は，s が 1 のときには $\psi\sigma^2$，それ以外のときには 0 となる。
自己相関も s が 1 のときには $\psi/(1+\psi^2)$，それ以外のときには 0 となる。

ある時点から自己相関が 0 になるのが移動平均モデルの特徴である。

14.1.3 より複雑なモデル

より複雑な確率過程を描写するには，自己回帰 (AR) モデルの次数をさらに高くする。
移動平均 (MA) モデルではホワイト・ノイズの移動平均をより過去のホワイト・ノイズを含める。

さらに，自己回帰モデルと移動平均モデルを結合した自己回帰移動平均（ARMA）モデルを構築することもできる。

$$\begin{aligned} X_t = \mu + \theta_1 X_{t-1} + \theta_2 X_{t-2} + \cdots + \theta_p X_{t-p} \\ + u_t + \psi_1 u_{t-1} + \cdots \psi_q u_{t-q} \end{aligned}$$

このモデルを ARMA(p, q) モデルと呼ぶ。
X_t を
　1 階階差 $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$
　2 階階差 $\Delta^2 X_t = \Delta X_t - \Delta X_{t-1}$
　$\vdots$
　d 階階差 $\Delta^d X_t = \Delta^{d-1} X_t - \Delta^{d-1} X_{t-1}$
で置き換えて,

$$\begin{aligned} \Delta^d X_t = \mu + \theta_1 \Delta^d X_{t-1} + \theta_2 \Delta^d X_{t-2} + \cdots + \theta_p \Delta^d X_{t-p} \\ + u_t + \psi_1 u_{t-1} + \cdots \psi_q u_{t-q} \end{aligned}$$

を ARIMA(p, d, q) モデルと呼ぶ。

14.2 時系列モデルの作成手順と予測

残差 $\widehat{u}_t$ から判断して，u_t がホワイト・ノイズになるように，p，q を選んで，何度も推定しなおす。

標本の自己相関パターンから判断して適当と考えられるモデル（すなわち，p，d，q）を選択する。その場合にはできるだけ少ないパラメータ数（$= p + q$）となるモデルを選択する。

14.3 非定常時系列

14.3.1 単位根

経済変数で，特に重要な非定常時系列モデルは，ランダム・ウォーク過程（random walk process）である。
国内総生産（GDP），消費，投資，マネーサプライなどほとんどの経済変数は，ランダム・ウォーク過程に従う非定常時系列であるといわれている。
ある時系列がランダム・ウォーク過程に従っているかどうかの検定を単位根検定（unit root test）と呼ぶ。
この単位根検定における検定統計量は，t 分布や正規分布には従わないことがわかっている。
ランダム・ウォーク過程とは，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ の系列が,

$$X_t = X_{t-1} + u_t$$

と表現される。ただし，u_t は，平均ゼロ，分散 σ^2 の分布に従うものとする。
1 階の階差をとることによって定常過程となるとき，その系列は 1 次の和分過程（integrated process of order one）に従っていると呼ばれ，$I(1)$ 過程と表現される（定常過程は $I(0)$ と表される）。
X_t が $I(d)$ 過程に従っているとき，$X_t \sim I(d)$ と表記することがある。

この記号を使うと，

$$X_t \sim I(1) \iff \Delta X_t \sim I(0)$$

という関係がある。
上記の $I(1)$ 過程 X_t が非定常であることを示す。

定常性（または，弱定常性）の条件は，
(i) X_t の平均は一定，
(ii) X_t の分散も一定，
(iii) X_t と X_{t-s} の共分散（すなわち，自己共分散）は時点の差のみに依存する，
ということである。

初期値 X_0 を定数（非確率）と仮定し，繰り返し代入することによって，

$$X_t = X_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_t$$

という式が得られる。
これを用いると，X_t の平均と分散は，

$$\mathrm{E}[X_t] = X_0 \qquad \mathrm{V}(X_t) = t\sigma^2$$

となる。また，

$$X_t = X_{t-s} + u_{t-s+1} + u_{t-s+2} + \cdots + u_t$$

を用いると，X_t と X_{t-s} の共分散は，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-s})\\
&= \mathrm{E}[(X_t - X_0)(X_{t-s} - X_0)]\\
&= \mathrm{E}[(X_{t-s} + u_{t-s+1} + u_{t-s+2} + \cdots + u_t - X_0)(X_{t-s} - X_0)]\\
&= \mathrm{E}[(X_{t-s} - X_0)^2]\\
&\quad + \mathrm{E}[(u_{t-s+1} + u_{t-s+2} + \cdots + u_t)(X_{t-s} - X_0)]\\
&= \mathrm{V}(X_{t-s}) = (t-s)\sigma^2
\end{aligned}$$

となる。
X_{t-s} は，過去の誤差項（$u_1, u_2, \cdots, u_{t-s}$）とは相関をもつが，将来の誤差項（$u_{t-s+1}, u_{t-s+2}, \cdots, u_t$）とは無相関である。

以上から，
$\mathrm{V}(X_t)$ は定数でなく時点 t に依存し，
$\mathrm{Cov}(X_t,\ X_{t-s})$ も時点の差 s だけでなく時点 t にも依存することがわかる。
t が大きくなると，$\mathrm{V}(X_t)$，$\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-s})$ ともに無限大になる。
したがって，ランダム・ウォーク過程 X_t は非定常であるといえる。
さらに，X_t と X_{t-s} の相関係数（すなわち，自己相関係数）は，

$$\begin{aligned}
\rho(s) = \rho(X_t, X_{t-s}) &= \frac{\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-s})}{\sqrt{\mathrm{V}(X_t)}\sqrt{\mathrm{V}(X_{t-s})}}\\
&= \frac{(t-s)\sigma^2}{\sqrt{t\sigma^2}\sqrt{(t-s)\sigma^2}} = \sqrt{\frac{t-s}{t}}
\end{aligned}$$

と計算される。
時系列に単位根が含まれている場合，t を一定としたとき，s が大きくなるにつれて，$\rho(s)$ はゆっくりと減衰していくという性質がある。
この性質を利用して，従来はグラフを描いて視覚的に単位根があるかどうかを判断していた。
しかし，ρ の値が 1 に近い定常過程の場合も，$\rho = 1$ の非定常過程の場合と同様に，自己相関関数が減衰的なものとなることが知られている。
したがって，自己相関関数の形状からだけでは定常過程と非定常過程との区別をすることが実際には困難である。
それを避けるために統計的な検定を行うことが必要とされる。
1970 年代後半に単位根の検定が開発され，近年では統計的に定常か非定常かの検定が行われるようになった。

以下に，単位根検定の方法を簡単に説明する。
X_t が AR(1) 過程

$$X_t = \theta X_{t-1} + u_t$$

に従っているとする。
ただし，u_t は，$t = 1, 2, \cdots, n$ についてそれぞれ独立に，平均ゼロ，分散 σ^2 の分布に従うものとする。
もし $|\theta| < 1$ であれば $X_t \sim I(0)$ であるが，
もし $\theta = 1$ であれば X_t は単位根をもち，$X_t \sim I(1)$ となる。
特に，経済時系列では，単位根があれば $\theta = 1$ となり，そうでなければ $\theta < 1$ となる。
そのため，単位根検定では左片側検定が行われる。
実際に，検定するためには，

$$\Delta X_t = \beta X_{t-1} + u_t$$

と変形して，帰無仮説 $H_0 : \beta = 0$，対立仮説 $H_1 : \beta < 0$ の左片側検定を行うことになる ($\beta = \theta - 1$ という関係がある)。
この場合，β の最小 2 乗推定量

$$\hat{\beta} = \frac{\sum t = 1nX_{t-1}\Delta X_t}{\sum t = 1nX_{t-1}^2}$$

は，正規分布には従わないことが知られている。
したがって，帰無仮説 $H_0 : \beta = 0$ が正しいとき，検定統計量

$$t_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\beta}}{Se(\hat{\beta})}$$

も t 分布には従わず，通常の t 検定を適用することはできない。
検定統計量 $t_{\hat{\beta}}$ の分布は，明示的に求めることができず，特殊な関数形をしているが，t 分布よりも左側の裾野が広い分布となっていることが知られている。
したがって，検定統計量 $t_{\hat{\beta}}$ を誤って通常の t 分布表 (付表 3) を用いて検定すると，対立仮説 $H_1 : \beta < 0$ を過剰に採択してしまうことになる。
言いかえると，実際は $I(1)$ 変数であるにもかかわらず，誤って，$I(0)$ 変数と判定されてしまう可能性が高くなるのである。
検定統計量 $t_{\hat{\beta}}$ の分布の下側 1 パーセント点と 5 パーセント点の値は，下の表に示されている (検定統計量 $t_{\hat{\beta}}$ の分布は標本数 n に依存することに注意せよ)。

単位根検定

α \ n	25	50	100	250	500	∞
0.01	-2.66	-2.62	-2.60	-2.58	-2.58	-2.58
0.05	-1.95	-1.95	-1.95	-1.95	-1.95	-1.95

具体的には，$t_{\hat{\beta}}$ の統計値と表中の数値とを比較する。
もし $t_{\hat{\beta}}$ の統計値が，表中の対応する数値より大きければ，帰無仮説 $H_0 : \beta = 0$ を採択することになる。
この場合，X_t は単位根をもつ非定常時系列であると判断する。

14.3.2　見せかけ回帰

経済時系列の場合，全く関係のない変数間で回帰分析を行った結果，決定係数が高く t 値も高いという結果を得る傾向がある。この回帰は**見せかけ回帰** (spurious regression) と呼ばれ，これは経済時系列変数で回帰分析を行う場合に非常に重要な問題となる。
次の単回帰モデルを考える。

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

Y_t と X_t が次のように単位根をもつ非定常時系列であるとする。

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_{t-1} + \epsilon_t \\ X_t &= X_{t-1} + \eta_t \end{aligned}$$

ただし，ϵ_t，η_t は，すべての $t = 1, 2, \cdots, n$ について，互いに独立であるとする。
以上の設定のもとで，X_t は Y_t に影響を与えない変数であったとしても，次のような結果を得ることが知られている。

1. 回帰係数 β に関する t 統計量 (t 値) は，観測数が大きければ，大きな値となりやすい。無関係な変数間の回帰なので，t 値は絶対値で小さい値となるべきである。しかし，逆に大きな t 値を示すことがあり，間違った推論になる傾向がある。

2. 決定係数 R^2 は変数間の関係がないのでゼロに近づくべきであるが，見せかけ回帰では 0 と 1 の何らかの間の値を取る。ゼロに近いとは限らず，逆に 1 に近い値を取る可能性も十分にある。

3. DW 比はゼロに近い値となる。すなわち，誤差項 u_t の強い正の系列相関があると判断される。

このように，全く意味のない回帰を，得られた推定結果から，あたかも意味のあるように解釈してしまうことが起こりうるのである。このような状況のもとでは，最小 2 乗推定量 $\hat{\beta}$ は β の一致推定量にはならないということも知られている。
見せかけ回帰を避けるためには，誤差項 u_t が定常である必要がある。これは，次節で述べる共和分という概念に密接に関連する。

14.3.3　共和分

Y_t，X_t ともに単位根をもつ，すなわち，$Y_t \sim I(1)$，$X_t \sim I(1)$ とする。このとき，Y_t と X_t の線形結合が定常，す

なわち，$Y_t - \beta X_t \sim I(0)$ であれば，Y_t と X_t とは**共和分** (cointegration) の関係にあるという。
重要な点は，次の回帰

$$Y_t = \beta X_t + u_t$$

を考えた場合，以下のようにまとめられる。

(i) $u_t \sim I(1)$ のとき，β の最小 2 乗推定量 $\hat{\beta}$ は一致性をもたず，しかも，回帰式の結果を評価すること自体に意味がなくなる。 $\longrightarrow$ **見せかけ回帰**

(ii) $u_t \sim I(0)$ のとき，β の最小 2 乗推定量 $\hat{\beta}$ は一致性をもち，Y_t と X_t との間には安定的な関係がある。 $\longrightarrow$ **共和分回帰**

(ii) の場合は，$\beta \neq 0$ となることに注意せよ。もし $\beta = 0$ であれば，$Y_t = u_t$ となり，$Y_t \sim I(1)$ なので，$u_t \sim I(1)$ となる必要がある。よって，$u_t \sim I(0)$ となるためには，$\beta \neq 0$ でなければならない。
このように，誤差項 u_t が定常かどうかによって，回帰式の意味が大きく異なることになる。したがって，回帰式に意味があるかどうかを調べるために，共和分の検定を行う必要がある。さまざまな検定方法が提案されているが，本書では，最も簡単な方法を紹介する (本書で解説する検定は，**エングル＝グレンジャー検定**と呼ばれる)。
定数項を含めて，次の回帰式

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

を考える。
共和分分析を行う前に，まず最初に，行わなければならないことは，単位根検定である。
すなわち，まず，Y_t，X_t ともに，$Y_t \sim I(1)$，$X_t \sim I(1)$ であることを検定によって確認する。
次に，最小 2 乗法によって α，β を推定し，残差 $e_t = Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_t$ を求める。
最後に，

$$\Delta e_t = \gamma e_{t-1} + v_t$$

から，帰無仮説 $H_0: \gamma = 0$，対立仮説 $H_1: \gamma < 0$ の単位根検定を行う。このとき，検定統計量

$$t_{\hat{\gamma}} = \frac{\hat{\gamma}}{Se(\hat{\gamma})}$$

の分布は，前節の単位根検定で用いた表に示された分布表とも t 分布表とも異なり，この場合は下記の表を用いる。

残差の単位根検定

k'	1		2	
n \ α	0.01	0.05	0.01	0.05
50	−4.32	−3.67	−4.84	−4.11
100	−4.07	−3.37	−4.45	−3.93
200	−4.00	−3.37	−4.35	−3.78

k'	3		4	
n \ α	0.01	0.05	0.01	0.05
50	−4.94	−4.35	−5.41	−4.76
100	−4.75	−4.22	−5.18	−4.58
200	−4.70	−4.18	−5.02	−4.48

表では，標本数 (n) と説明変数の個数 $(k' = k - 1)$ に依存して，
検定統計量 $t_{\hat{\gamma}}$ の分布の下側 1 パーセント点と 5 パーセント点が示されている。
$t_{\hat{\gamma}}$ の統計値と表中の対応する数値とを比較して，残差 e_t の単位根検定が行われる。
分布表に上の表を用いることを除いて，前節で行った単位根検定をそのまま当てはめればよい。
すなわち，帰無仮説 $H_0: \gamma = 0$ が棄却されれば，$u_t \sim I(0)$ と判定され，回帰式の分析 ($\hat{\beta}$，R^2，DW 比等) を行うことができる。
逆に，帰無仮説 $H_0: \gamma = 0$ を棄却できなければ，$u_t \sim I(1)$ と判定され，これ以上の回帰式の分析には全く意味がなくなる。
この場合は，X_t とは別の $I(1)$ 変数を回帰式に含めなかったために，このような見せかけ回帰が生じたと考えられる。