

# **Volatility Models**

Hisashi Tanizaki

Graduate School of Economics

Osaka University, Osaka 560-0043, Japan

([tanizaki@econ.osaka-u.ac.jp](mailto:tanizaki@econ.osaka-u.ac.jp))

2014/02/13

Volatility  $\Rightarrow$  経済の不安定性と解釈する。

## 今までの流れ（個人的な流れ）

(1) H. Tanizaki (2004) “On Asymmetry, Holiday and Day-of-the-Week Effects in Volatility of Daily Stock Returns: The Case of Japan,” *Journal of the Japan Statistical Society*, Vol.34, No.2, pp.129-152.

$\Rightarrow$  日本のみ。株価の変動要因 (休日効果, 火曜効果, 金曜効果, 非対称効果) の分析。Stochastic Volatility (SV) モデル。

(2) S. Hamori, H. Tanizaki and Y. Matsubayashi (2006) “An Empirical Analysis on the Business Cycle Transmission between Japan and the United States,” *The Eurasian Review of Economics and Finance*, Vol.2, No.2, pp.1-8.

$\Rightarrow$  日本・米国間の景気の波及効果の検討。OLS。

(3) H. Tanizaki and S. Hamori (2009) “Volatility Transmission between Japan, UK and USA in Daily Stock Returns,” *Empirical Economics*, Vol.36, No.1, pp.27-54.

⇒ 日・米・英の3か国間の株価変動の波及効果の検討。SVモデル。休日祭日がそれぞれの国で異なるため、同時推定は難しい。

(4) 谷崎久志 (2010) 「株価，為替，金利のボラティリティの変動要因・相互依存関係について：ノンパラメトリック推定の応用」 『国民経済雑誌』第201巻，第3号，pp.15-28.

⇒ 株価・為替・金利の変動の波及効果の検討。ノンパラメトリック推定。分散にAR構造を仮定していない。

(5) 谷崎久志 (2012) 「日本における株価，外国為替レート，金利のボラティリティの相互作用に関する分析」 『経済学論究』第66巻，第1号，pp.29-46.

⇒ 株価・為替・金利の変動の波及効果の検討。SVモデル。

## Stochastic Volatility モデル : (5)

$$y_t = x_t \beta + \exp\left(\frac{1}{2} h_t\right) \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \text{iid } N(0, 1),$$
$$h_t = \delta h_{t-1} + z_t \alpha + \eta_t, \quad \eta_t \sim \text{iid } N(0, \sigma^2).$$

$y_t$  は株価の対数階差の 100 倍 (株価収益率,  $S_t$ ), 円・ドル為替レートの対数階差の 100 倍 (為替変化率,  $E_t$ ), 10 年国債利回りの対数階差の 100 倍 (金利変化率,  $R_t$ ) など。  $x_t$ ,  $z_t$  は説明変数。  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  はパラメータ。

$$y_t = S_t, E_t, \text{ or } R_t$$

$$x_t = (1, Ho_t, Tu_t, Fr_t, D_{st}^-, D_{et}^-, D_{rt}^-, S_{t-1}, E_{t-1}, R_{t-1})$$

$$y_t = S_t \text{ のとき, } \quad z_t = (1, Ho_t, Tu_t, Fr_t, D_{st}^-, D_{et}^-, D_{rt}^-, \hat{h}_{s,t-1}, \hat{h}_{r,t-1})$$

$$y_t = E_t \text{ のとき, } \quad z_t = (1, Ho_t, Tu_t, Fr_t, D_{st}^-, D_{et}^-, D_{rt}^-, \hat{h}_{s,t-1}, \hat{h}_{r,t-1})$$

$$y_t = R_t \text{ のとき, } \quad z_t = (1, Ho_t, Tu_t, Fr_t, D_{st}^-, D_{et}^-, D_{rt}^-, \hat{h}_{s,t-1}, \hat{h}_{e,t-1})$$

## Nonparametric Volatility モデル : (4)

$$y_t = m(x_t) + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim (0, \sigma_t^2).$$

$y$  の条件付分散は,

$$\sigma_t^2 = V(y_t|x_t) = E((y_t - m_t)^2|x_t)$$

となる。ただし,  $m_t \equiv m(x_t)$

- $\sigma_t^2$  に非線形 AR(1) の構造 :

$$\sigma_t^2 = g(\sigma_{t-1}^2, x_t)$$

の推定は無理?

- $x_t$  にダミー変数が含まれるとき, カーネルの関数形は?

# GARCH(1,1) モデル : (今回)

$$y_t = x_t \beta + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2),$$

$$\sigma_t^2 = \delta_1 \epsilon_{t-1}^2 + \delta_2 \sigma_{t-1}^2 + z_t \alpha$$

$$y_t = S_t, E_t, \text{ or } R_t$$

$$x_t = (1, Ho_t, Tu_t, Fr_t, D_{st}^-, D_{et}^-, D_{rt}^-, S_{t-1}, E_{t-1}, R_{t-1})$$

$$y_t = S_t \text{ のとき, } z_t = (1, \epsilon_{t-1}^2, \sigma_{t-1}^2, Ho_t, Tu_t, Fr_t, D_{st}^-, D_{et}^-, D_{rt}^-, \hat{\sigma}_{e,t-1}^2, \hat{\sigma}_{r,t-1}^2)$$

$$y_t = E_t \text{ のとき, } z_t = (1, \epsilon_{t-1}^2, \sigma_{t-1}^2, Ho_t, Tu_t, Fr_t, D_{st}^-, D_{et}^-, D_{rt}^-, \hat{\sigma}_{s,t-1}^2, \hat{\sigma}_{r,t-1}^2)$$

$$y_t = R_t \text{ のとき, } z_t = (1, \epsilon_{t-1}^2, \sigma_{t-1}^2, Ho_t, Tu_t, Fr_t, D_{st}^-, D_{et}^-, D_{rt}^-, \hat{\sigma}_{s,t-1}^2, \hat{\sigma}_{e,t-1}^2)$$

推定期間 : 1993年1月4日~2015年2月10日 (データ数 5436)

## 記号まとめ：

### 被説明変数

- $S_t$ ： 株価の対数階差の 100 倍（株価収益率）
- $E_t$ ： 円・ドル為替レートの対数階差の 100 倍（為替変化率）
- $R_t$ ： 10 年国債利回りの対数階差の 100 倍（金利変化率）

### 説明変数

- $Ho_t$ ：  $t$  期と  $t-1$  期の間の休みの日数（休日効果）

1993 年 1 月 4 日～2015 年 1 月 13 日 (データ数 5436) の  $Ho_t$

$Ho_t$	0	1	2	3	4	5	6
日数	4201	78	977	139	18	16	6

休み期間が長いと、情報量が増え、不安定性が増すので、 $Ho_t \uparrow \Rightarrow \sigma_t^2 \uparrow$

- $Tu_t$ :  $t$  期が火曜日なら 1, それ以外は 0 (火曜効果)

日本の市場 (特に, 株価) は, 米国市場の影響を受け易く, 米国の休日効果が日本の火曜日に現れると言われている。

したがって,  $Tu_t = 1 \implies \sigma_t^2 \uparrow$

- $Fr_t$ :  $t$  期が金曜日なら 1, それ以外は 0 (金曜効果)

株価について,  $Fr_t = 1 \implies \sigma_t^2 \uparrow$  の傾向があるという文献多数 (理由は?)

- $D_{st}^-$ :  $S_{t-1} < 0$  のとき 1, それ以外は 0 (非対称性効果)

株価について,  $D_{st}^- = 1 \implies \sigma_t^2 \uparrow$  の傾向がある。すなわち, 株価変動率の分散が左右非対称。

- $D_{et}^-$ :  $E_{t-1} < 0$  のとき 1, それ以外は 0 (非対称性効果)

- $D_{rt}^-$ :  $R_{t-1} < 0$  のとき 1, それ以外は 0 (非対称性効果)



- $\hat{\sigma}_{s,t-1}^2$  :  $\sigma_{s,t-1}^2$  の推定値 ( $\sigma_t^2$  への波及効果)
- $\hat{\sigma}_{e,t-1}^2$  :  $\sigma_{e,t-1}^2$  の推定値 ( $\sigma_t^2$  への波及効果)
- $\hat{\sigma}_{r,t-1}^2$  :  $\sigma_{r,t-1}^2$  の推定値 ( $\sigma_t^2$  への波及効果)

## 計算方法：

1. すべての  $y_t = S_t, E_t, R_t$  について,  $z_t = (1, \epsilon_{t-1}^2, \sigma_{t-1}^2, Ho_t, Tu_t, Fr_t, D_{st}^-, D_{et}^-, D_{rt}^-)$  として, GARCH(1,1) で推定 (Eviews 8.1 を利用)
2. ステップ 1 で求めた 3 つの  $\sigma_{t-1}^2$  の推定値を  $\hat{\sigma}_{s,t-1}^2, \hat{\sigma}_{e,t-1}^2, \hat{\sigma}_{r,t-1}^2$  として,  $z_t$  に含めて, GARCH(1,1) で推定 (Eviews 8.1 を利用)
3. ステップ 2 を, 3 つの対数尤度関数が収束するまで繰り返す。

# なぜ可変分散か？ — 分散一定モデルの推定

		$y_t = S_t$			$y_t = E_t$			$y_t = R_t$		
		係数	SE	P 値	係数	SE	P 値	係数	SE	P 値
$x_t$	const.	-.0473	.0560	.398	-.0137	.0260	.598	-.1258	.0921	.172
	$HO_t$	.0120	.0225	.593	.0069	.0104	.509	.0347	.0370	.348
	$Tu_t$	.0249	.0533	.640	.0009	.0247	.971	.0924	.0876	.292
	$Fr_t$	-.0301	.0545	.581	.0247	.0253	.328	.0526	.0896	.557
	$D_{st}^-$	-.0189	.0592	.750	-.0155	.0275	.574	-.0031	.0973	.974
	$D_{et}^-$	.0150	.0597	.802	.0056	.0277	.841	.0955	.0982	.331
	$D_{rt}^-$	.0943	.0556	.090	.0182	.0258	.481	.0152	.0915	.868
	$S_{t-1}$	-.0554**	.0202	.006	-.0215*	.0094	.022	-.0290	.0332	.382
	$E_{t-1}$	.0766	.0437	.080	.0021	.0203	.916	.0800	.0719	.266
$R_{t-1}$	.0235*	.0112	.036	-.0021	.0052	.683	.0242	.0184	.190	

$$y_t = x_t\beta + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

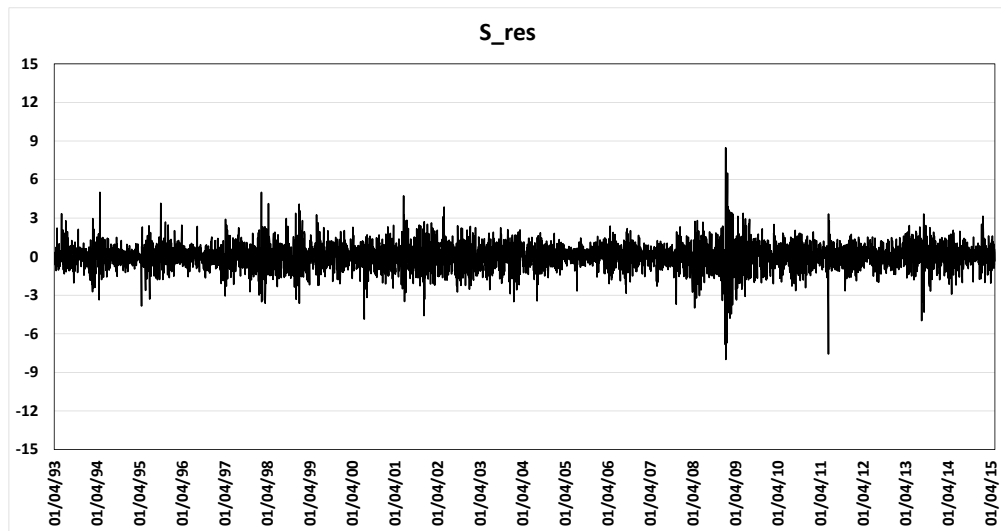
## 残差分析：

	$S$ の残差	$E$ の残差	$R$ の残差
ave	0.0	0.0	0.0
std	1.504	0.698	2.473
skew	-0.290	-0.309	0.529
kurt	5.432	3.519	15.565
min	-12.0	-4.5	-32.5
max	12.7	3.9	23.3
0.05	-2.345	-1.075	-3.514
0.10	-1.728	-0.796	-2.511
0.50	0.027	0.015	-0.035
0.90	1.699	0.776	2.466
0.95	2.255	1.037	3.643

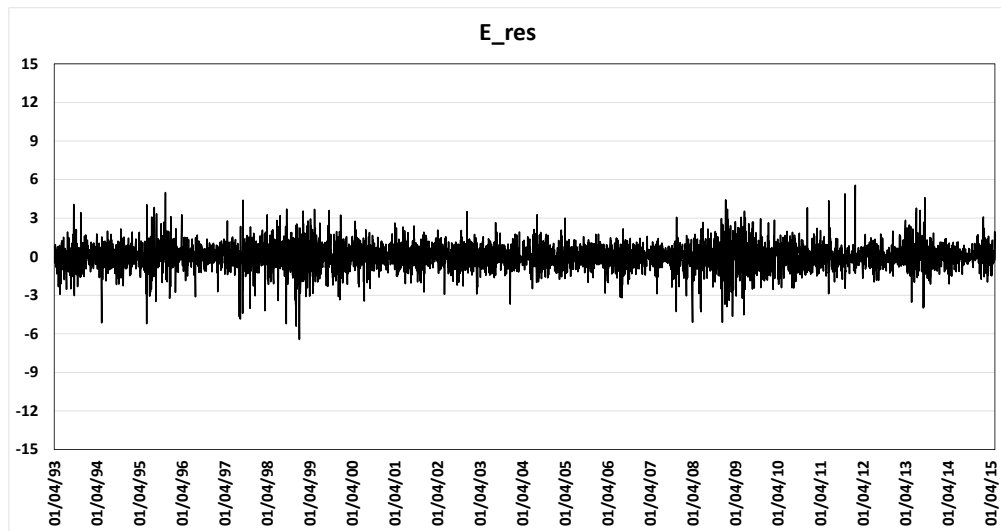
平均 0, 分散 1 に基準化された残差

	$S$ の残差	$E$ の残差	$R$ の残差
ave	0.0	0.0	0.0
std	1.000	1.0	1.0
skew	-0.290	-0.309	0.529
kurt	5.432	3.519	15.565
min	-8.0	-6.4	-13.1
max	8.5	5.5	9.4
0.05	-1.559	-1.541	-1.421
0.10	-1.149	-1.140	-1.016
0.50	0.018	0.021	-0.014
0.90	1.130	1.111	0.997
0.95	1.500	1.486	1.473

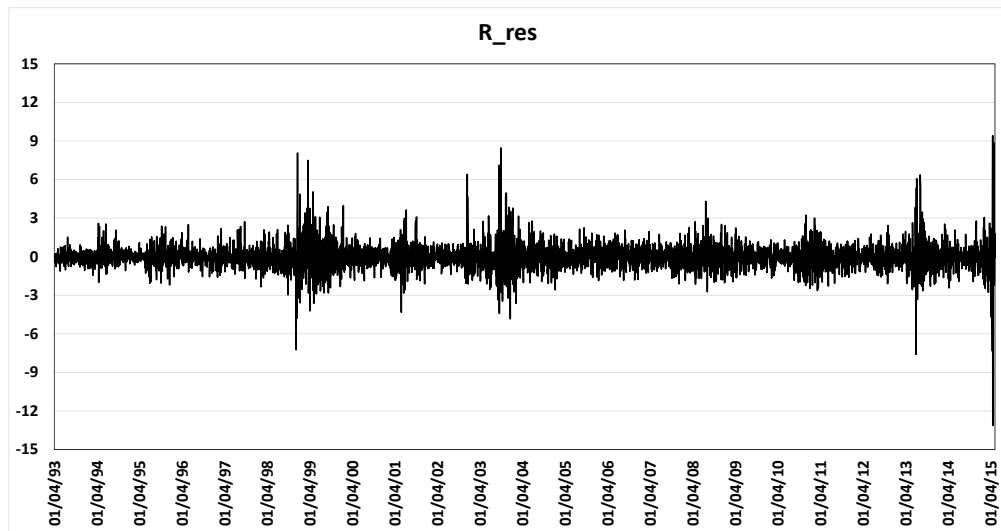
## 基準化された残差のグラフ：



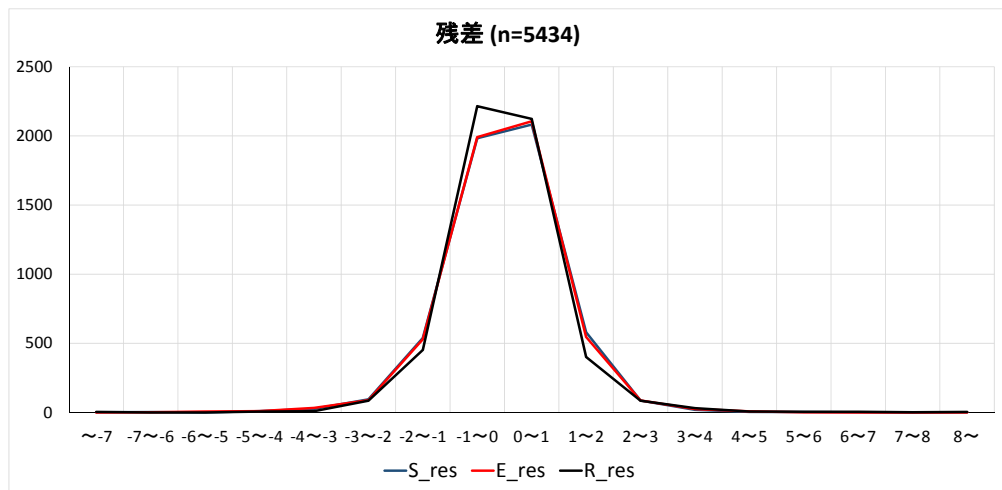
## 基準化された残差のグラフ：



## 基準化された残差のグラフ：



## 基準化された残差のヒストグラム：





$y_t = S_t$									
		係数	標準誤差	$P$ 値			係数	標準誤差	$P$ 値
$x_t$	const.	-.027556	.045044	.5407		$\epsilon_{t-1}^2$	.082635**	.005435	.0000
	$Ho_t$	.007410	.017407	.6703		$\sigma_{t-1}^2$	.882732**	.008350	.0000
	$Tu_t$	-.032906	.041325	.4259		const.	-.029013	.030866	.3472
	$Fr_t$	-.043957	.043663	.3141		$Ho_t$	.136952**	.023186	.0000
	$D_{st}^-$	.073842	.049221	.1336		$Tu_t$	-.434698**	.077864	.0000
	$D_{et}^-$	-.038423	.047590	.4195	$z_t$	$Fr_t$	-.031268	.070766	.6586
	$D_{rt}^-$	.079358	.045362	.0802		$D_{st}^-$	.186495**	.022908	.0000
	$S_{t-1}$	-.008231	.022935	.7197		$D_{et}^-$	.009100	.019467	.6402
	$E_{t-1}$	.046225	.037908	.2227		$D_{rt}^-$	.030686	.018100	.0900
	$R_{t-1}$	.020601	.010838	.0573		$\hat{\sigma}_{e,t-1}^2$	.008207	.021355	.7008
						$\hat{\sigma}_{r,t-1}^2$	.002564**	.000537	.0000

$$y_t = x_t\beta + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2), \quad \sigma_t^2 = \delta_1\epsilon_{t-1}^2 + \delta_2\sigma_{t-1}^2 + z_t\alpha$$

$y_t = E_t$									
		係数	標準誤差	P 値			係数	標準誤差	P 値
$x_t$	const.	-.003040	.022197	.8911		$\epsilon_{t-1}^2$	.103338**	.007220	.0000
	$Ho_t$	.007312	.008356	.3816		$\sigma_{t-1}^2$	.813245**	.012104	.0000
	$Tu_t$	-.014126	.020386	.4884		const.	-.001547	.007209	.8301
	$Fr_t$	.035833	.020720	.0837		$Ho_t$	.061252**	.005637	.0000
	$D_{st}^-$	-.013040	.022533	.5628		$Tu_t$	-.125125**	.016633	.0000
	$D_{et}^-$	.014407	.023115	.5331	$z_t$	$Fr_t$	-.007643	.016711	.6474
	$D_{rt}^-$	.008214	.022691	.7173		$D_{st}^-$	.014435*	.007067	.0411
	$S_{t-1}$	-.008197	.008467	.3329		$D_{et}^-$	.031016**	.004966	.0000
	$E_{t-1}$	.002044	.021764	.9252		$D_{rt}^-$	.002935	.005644	.6030
	$R_{t-1}$	-.006160	.005177	.2341		$\hat{\sigma}_{s,t-1}^2$	.007294**	.001252	.0000
					$\hat{\sigma}_{r,t-1}^2$	.000010	.000157	.9479	

$$y_t = x_t\beta + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2), \quad \sigma_t^2 = \delta_1\epsilon_{t-1}^2 + \delta_2\sigma_{t-1}^2 + z_t\alpha$$

$y_t = R_t$									
		係数	標準誤差	$P$ 値			係数	標準誤差	$P$ 値
	const.	-.037891	.065850	.5650		$\epsilon_{t-1}^2$	.080644**	.004758	.0000
	$Ho_t$	.037484	.021646	.0833		$\sigma_{t-1}^2$	.915284**	.005203	.0000
	$Tu_t$	.000775	.058173	.9894		const.	.147082**	.051772	.0045
	$Fr_t$	-.022740	.060819	.7085		$Ho_t$	-.029700	.028912	.3043
$x_t$	$D_{st}^-$	-.024003	.068983	.7279		$Tu_t$	-.322294*	.129864	.0131
	$D_{et}^-$	-.085525	.066521	.1986	$z_t$	$Fr_t$	-.119705	.120881	.3220
	$D_{rt}^-$	-.010214	.067361	.8795		$D_{st}^-$	-.047886	.030928	.1215
	$S_{t-1}$	-.024348	.025506	.3398		$D_{et}^-$	-.055579	.034669	.1089
	$E_{t-1}$	-.036729	.053455	.4920		$D_{rt}^-$	.080715**	.030106	.0073
	$R_{t-1}$	-.000527	.020904	.9799		$\hat{\sigma}_{s,t-1}^2$	.001220	.004735	.7966
						$\hat{\sigma}_{e,t-1}^2$	.016114	.027370	.5560

$$y_t = x_t\beta + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2), \quad \sigma_t^2 = \delta_1\epsilon_{t-1}^2 + \delta_2\sigma_{t-1}^2 + z_t\alpha$$

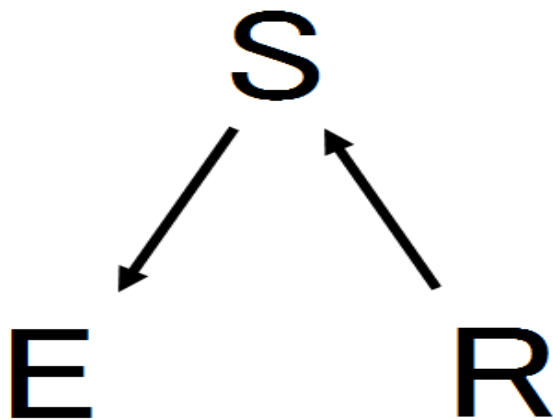
## 推定結果：

●レベル変数について： どの説明変数も変化率の値に影響を与えない。 ⇒  
Random walk (すなわち、分散を一定としたモデルとは異なる結果)

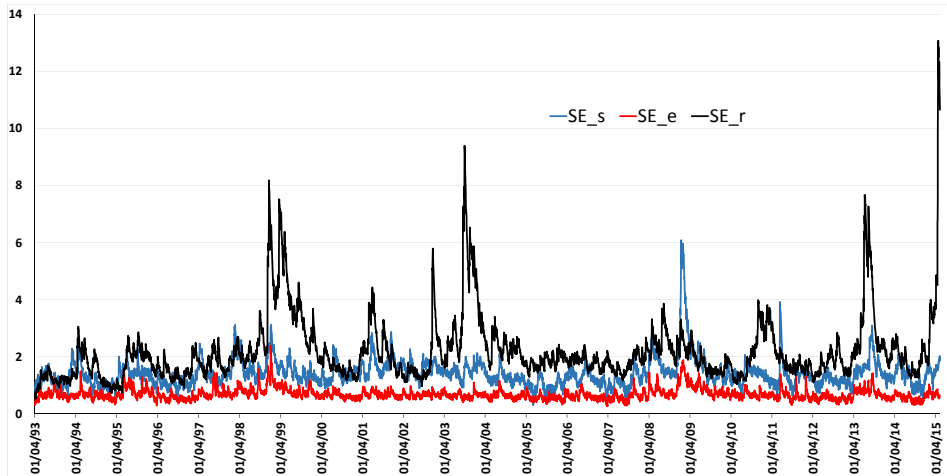
● Volatility について：

- 株価，為替，金利ともに ARCH 効果，GARCH 効果あり
- 株価，為替に休日効果あり
- 株価，為替，金利ともに火曜日効果あり（米国市場からの影響あり）
- 金曜日効果はどれもなし
- 自身の変数に対する非対称性効果はどれもあり
- 株価の変動方向は為替の Volatility に非対称的な影響あり
- 金利の Volatility は株価の Volatility に波及する
- 株価の Volatility は為替の Volatility に波及する

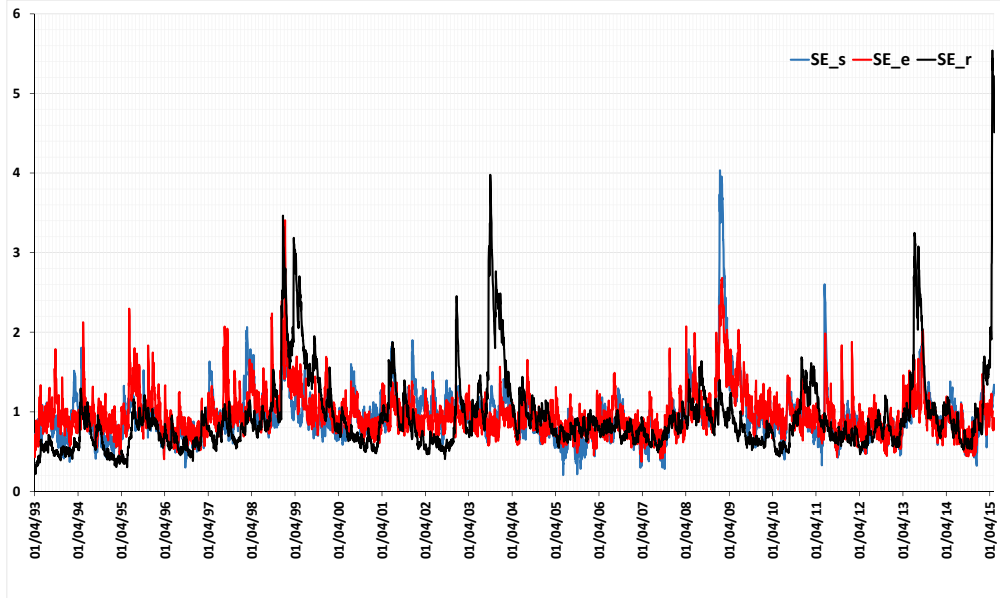
ボラティリティの波及効果：



## ボラティリティの推定結果：



## 分散1に基準化されたボラティリティの推定結果：



# 経済年表（世界）

<http://history.nobisiro.com/index.html> から引用

- 1992年9月 英国がユーロ参加断念
- 1994年1月 中国人民幣元が大幅切り下げ
- 1997年 アジア通貨危機
- 1997年11月 山一証券が経営破綻
- 1998年8月17日 ロシアがデフォルト
- 1998年10月 日本長期信用銀行が破綻、国有化される
- 1999年1月 欧州共通通貨＝ユーロが誕生
- 2000年 OECDがタックスヘイブンのブラックリストを初公表
- 2000年 米国ITバブルの崩壊
- 2001年12月 アルゼンチンがデフォルト
- 2001年12月 米国エンロンが破綻



- 2002年7月 米国ワールドコムが破綻(史上最大の倒産)
- 2005年7月 中国人民元の切り上げ
- 2006年1月 日本ライブドアショック
- 2007年 米不動産バブル崩壊
- 2008年7月 原油バブルがピークを迎える
- 2008年9月 米国リーマンショック勃発
- 2008年9月 米国AIG国有化
- 2008年9月 米下院で金融安定化法案の否決
- 2009年3月10日 日経平均がバブル後最安値を更新(7054円)
- 2010年5月 米国P&G株を誤発注事件
- 2010年 欧州債務危機が勃発
- 2012年12月10日 スイスの長期金利が世界史上最低0.36%を記録
- 2013年 中国シャドーバンキング問題が表面化

- 2013年3月 キプロスで預金封鎖が勃発
- 2013年4月 日本長期金利が世界史上最低の0.315%を記録
- 2014年1月 新興国で通貨危機

## 経済年表（日本）

<http://history.nobisiro.com/index.html> から引用

- 1992年5月 金融 日本で初めてMMFが誕生
- 1993年8月 政治・外交 政権交代により細川内閣が発足
- 1996年11月 金融 金融ビッグバンが制定(規制緩和)
- 1997年3月 金利・債券 日銀法が改正される(日銀の独立性の強化)
- 1997年4月 政治・外交 消費税が5%に増税(景気悪化の加速)
- 1997年11月 金融 山一証券が経営破綻
- 1998年10月 金融 日本長期信用銀行が破綻、国有化される

- 1998年10月 為替 日本で初めてFXが誕生(7~8日で20円超の円高)
- 1998年12月 金融 ナスダック・ジャパンが店頭市場→証券取引所
- 1999年2月 金利・債券 世界初のゼロ金利政策が導入される
- 1999年10月 金融 株式売買委託手数料が完全自由化
- 1999年11月 金融 マザーズ市場が開設
- 2001年9月 金融 日本でREITが導入される(J-REIT)
- 2001年10月 金融 確定拠出年金制度が開始
- 2002年5月 その他 日韓ワールドカップが開催
- 2003年5月 為替 翌年3月まで計32兆円の史上最大の円売り介入
- 2004年2月 金利・債券 物価連動国債の販売開始(対象は機関投資家)
- 2006年1月 金融 ライブドアショック
- 2006年4月 金融 GPIF(年金積立金管理運用独立行政法人)が設立
- 2006年9月 金融 ゆうちょ銀行が設立

- 2008年9月 金融 リーマンショックが勃発
- 2009年3月10日 金融 日経平均がバブル後最安値(7054円)
- 2009年9月 政治・外交 政権交代により民主党政権が発足
- 2011年3月 為替 東日本大震災(3/17に1ドル76.25円の最高値)
- 2012年12月 政治・外交 政権交代により再び自民党が与党に
- 2013年4月 金利・債券 6日に長期金利が世界史上最低0.315%

# 今後の展開

- Common Factor の導入

$$y_t = x_t B + a f_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \begin{pmatrix} \exp(h_{1t}) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \exp(h_{gt}) \end{pmatrix}$$

$$f_t = b_1 f_{t-1} + b_2 f_{t-2} + \cdots + b_p f_{t-p} + u_t,$$

$$h_t = \Lambda h_{t-1} + z_t \Gamma + \eta_t,$$

- Nonparametric 推定

$$y_t = m(x_t) + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim (0, \sigma_t^2),$$

$$\sigma_t^2 = g(\sigma_{t-1}^2, z_t) + \eta_t.$$

$$\begin{aligned}
m(x) &= E(y|x) = \int \frac{yf_{yx}(y, x)}{f(x)} dy \\
\hat{m}(x) &= \int \frac{y\hat{f}_{yx}(y, x)}{\hat{f}(x)} dy = \frac{\frac{1}{nh^{k+1}} \sum_{t=1}^n \int y K_{yx}\left(\frac{y_t - y}{h}, \frac{x_t - x}{h}\right) dy}{\frac{1}{nh^k} \sum_{t=1}^n K\left(\frac{x_t - x}{h}\right)} \\
&= \frac{\sum_{t=1}^n y_t K\left(\frac{x_t - x}{h}\right)}{\sum_{t=1}^n K\left(\frac{x_t - x}{h}\right)}
\end{aligned}$$

$x_t$  が離散変数 (休日効果, 火曜・金曜効果, 非対称効果など) の場合,  $K(\cdot)$  は連続関数でいいのか??